Karakteriseringar av rektifierbara mängder

Robert Brunberg

15.10.2015

Helsingfors universitet
Institutionen för matematik och statistik
Handledare: Pertti Mattila

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty			Laitos — Institution — Department
Matematisk-naturvetenskapliga fakulteten			Institutionen för matematik och statistik

Tekijä — Författare — Author

Robert Brunberg

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Karakteriseringar av rektifierbara mängder

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematik

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu-avhandling	Oktober 2015	64 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

I denna avhandling karakteriseras rektifierbara mängder med hjälp av approximativa tangentplan, densitet och ortogonala projektioner. Karakteriseringarna beskriver den lokala strukturen hos rektifierbara mängder. Eftersom en mängd kan delas upp i en rektifierbar mängd och en helt orektifierbar mängd så definierar karakteriseringssatserna också helt orektifierbara mängder.

Inledningsvis presenteras grundläggande definitioner och satser inom måtteori. I kapitel två behandlas måtteoretiska egenskaper för Lipschitz funktioner. Dessa egenskaper utgör grunden för bevisen av karakteriseringssatserna. I kapitlet visas också att definitionen av rektifierbarhet är densamma oberoende av om Lipschitz funktioner eller kontinuerligt deriverbara funktioner används i definitionen för rektifierbarhet.

Karakteriseringssatserna bevisas i kapitel tre. Utgångspunkten är en lokal linjär approximering av rektifierbara mängder. Karakteriseringen med approximativa tangentplan följer av detta. Därefter bevisas att en mängd är rektifierbar om och endast om densiteten i nästan varje punkt i mängden är 1. Slutligen karakteriseras rektifierbara mängder med ortogonala projektioner. Federer-Besicovitchs projektionssats utgör ena halvan av denna sats. Satsen bevisas först i det tvådimensionella fallet och generaliseras därefter induktivt till ett euklidiskt rum med ändlig dimension.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Besicovitch-Federers projektionssats, Lipschitz funktioner, Rektifierbara mängder, Tangentplan

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Campusbiblioteket i Gumtäkt

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Innehåll

Kapitel 0

Inledning

En kurva är rektifierbar, även kallat uträtbar, om dess längd är ändlig. Före differential- och integralkalkylen utvecklades uppskattades längden av godtyckliga kurvor genom att approximera kurvorna med polygoner. I mitten av 1600-talet bidrog Fermat och Heuraet oberoende av varandra till att utveckla den integral som idag används för att bestämma längden av en kurva. Koch snöflingekurva, andra fraktalliknande kurvor och vissa snabbt oscillerande kontinuerliga funktioner är exempel på kurvor som har oändlig längd.

Bildmängden för en rektifierbar kurva kan täckas nästan helt med uppräkneligt många bildmängder av Lipschitz funktioner. Begreppet rektifierbarhet är en generalisering av begreppet uträtbar kurva. I denna avhandling kommer vi att använda Mattilas [9] definition för rektifierbarhet: en delmängd av $\mathbb{R}^n$ är m-rektifierbar om den kan täckas nästan helt med bildmängden av uppräkneligt många Lipschitz funktioner. Av Whitneys utvidgningssats följer att definitionen inte förändras om man i definitionen använder C^1 funktioner istället för Lipschitz funktioner. Därmed är rektifierbara mängder också en måtteoretisk generalisering av C^1 mångfalder.

Rektifierbara mängder spelar en central roll i geometrisk måtteori. Federer [4] berättar hur försök att lösa Plateau problemet gav upphov till detta området inom matematiken. Plateau problemet är att bland ytor med given rand finna den yta som har minst area. Morgan [10] förklarar hur begreppet yta kan definieras för att en sådan areaminimerande yta skall existera. Man bör ge avkall på vissa krav på släthet och utvidga den traditionella definitionen av yta för att mängden av ytor som uppfyller randvillkoret skall vara kompakt, vilket gör det möjligt att hitta en lösning.

För att kunna karakterisera rektifierbara mängder antas också att de m-rektifierbara mängderna är mätbara och har ändligt m-dimensionellt Hausdorff mått. Besicovitch undersökte rektifierbara mängder i planet och bevisade flera satser med hjälp av geometriska konstruktioner. Federer studerade rektifierbara mängder i euklidiska rum i medlet av 1900-talet och har utvidgat Besicovitchs satser. Vad rektifierbara mängder beträffar är kanske Besicovitch-Federers projektionssats hans mest kända sats. White presenterade ett nytt bevis, som bygger på Besicovitch bevis för det tvådimensionella fallet, för satsen år 1998. Marstrand, Mattila och Preiss har visat bland mycket annat hur rektifierbara mängder kan karakteriseras med densitet.

Fokus i den här magisteravhandlingen ligger på ekvivalenta definitioner av rektifierbara mängder. Tangentmått kommer dock inte att behandlas. Likheter mellan rektifierbara mängder och mångfalder tas ej upp och inte heller tillämpningar. I det första kapitlet samlar vi definitioner och satser inom måtteori som är behövliga i fortsättningen av avhandlingen. I kapitel två behandlas måtteoretiska egenskaper för Lipschitz funktioner som kommer att utgöra en grund för bevisen av karakteriseringssatserna i kapitel tre.

Genom att granska fullt likvärdiga definitioner av rektifierbara mängder undersöker vi de inneboende egenskaperna för rektifierbara mängder. Karakteriseringen med hjälp av tangentplan beskriver rektifierbara mängders lokala struktur. Då vi definierar rektifierbara mängder med hjälp av densitet visar vi att m-rektifierbara mängder med positivt mått är detsamma som regelbundna m-mängder. Beviset för den avslutande karakteriseringssatsen skildrar hur det att helt orektifierbara mängder lokalt sett inte kan anpassas väl med plan påverkar måtten för bilderna av de ortogonala projektionerna av mängderna. Med ett fåtal exempel åskådliggör vi också kännetecknande drag för helt orektifierbara mängder.

Kapitel 1

Måtteori

I detta kapitel samlas definitioner och satser inom måtteori som kommer att användas i de följande kapitlen. Definitioner exkluderas ifall det inte är vanligt att begreppet ifråga definieras på olika sätt. Välkända satser utelämnas. Bevis för allmänt använda satser förbigås.

1.1 Definitioner

Då E är en icke-tom delmängd av ett normerat rum skriver vi $d(E) = \sup\{|x-y| \colon x, y \in E\}$. Om $E = \emptyset$ så är $d(E) = 0$.

Definition 1.1. *Hausdorff mått.* Låt $A \subset \mathbb{R}^n$, $s \geq 0$ och $\delta > 0$. Då definieras $\mathcal{H}^s_\delta$ så att

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\{\sum_i d(E_i)^s \colon A \subset \bigcup_i E_i, E_i \subset \mathbb{R}^n \text{ och } d(E_i) \leq \delta\}.$$

Det s-dimensionella Hausdorff måttet $\mathcal{H}^s$ för mängden $A \subset \mathbb{R}^n$ är

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Definition 1.2. *Nätmått.* Låt $A \subset \mathbb{R}^n$, $s \geq 0$ och $\delta > 0$. Då definieras $\mathcal{M}^s_\delta$ på följande sätt:

$$\mathcal{M}^s_\delta(A) = \inf\{\sum_i d(Q_i)^s \colon A \subset \bigcup_i Q_i, d(Q_i) \leq \delta\},$$

där $Q_i = [2^{-k}m_1, 2^{-k}(m_1+1)) \times [2^{-k}m_2, 2^{-k}(m_2+1)) \times \ldots \times [2^{-k}m_n, 2^{-k}(m_n+1))$ är n-dimensionella halvöppna binära kuber, $m_1, \cdots, m_n$ är heltal och k är ett icke-negativt heltal. Det s-dimensionella nätmåttet $\mathcal{M}^s$ för mängden $A \subset \mathbb{R}^n$ är

$$\mathcal{M}^s(A) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{M}^s_\delta(A).$$

Mängden av m-dimensionella delrum av ett affint delrum $E \subset \mathbb{R}^n$ betecknar vi $Gr(m, E)$. Det m-dimensionella Lebesguemåttet betecknas $\mathcal{L}^n$. Då $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ betecknar vi $\mathcal{L}^n(B(0,1)) = \alpha(n)$.

Med en rotation avser vi en ortogonal avbildning vars determinant är 1. Mängden av rotationer av $\mathbb{R}^n$, $SO(n)$, och mängden av m-dimensionella delrum av $\mathbb{R}^n$ är kompakta topologiska grupper. I respektive grupp kan vi således definiera ett Haarmått som är ett unikt sannolikhetsmått. Det jämnt fördelade sannolikhetsmåttet för mängden $SO(n)$ betecknar vi med $\theta(n)$. Nedan ger vi förslag på hur det senare måttet kan definieras på ett mer explicit sätt.

I Mattila [9] finns det en övning där man skall visa att följande definition ger det ifrågavarande jämnt fördelade sannolikhetsmåttet.

Definition 1.3. *Mått för mängden av delrum.* Låt $0 < m \leq n$ och $L(v_1, \ldots, v_m)$ vara ett linjärt hölje för vektorerna $v_1, \ldots v_m \in \mathbb{R}^n$. Sannolikhetsmåttet $\gamma_{n,m}$ för $Gr(m, \mathbb{R}^n)$ definieras här på följande sätt: om $A \subset Gr(m, \mathbb{R}^n)$ så är

$$\gamma_{n,m}(A) = \alpha(n)^{-m} \underbrace{\mathcal{L}^n \times \cdots \times \mathcal{L}^n}_{\text{m}}(\{(v_1, \ldots, v_m) \in (\mathbb{R}^n)^m \colon |v_i| \leq 1, L(v_1, \ldots, v_m) \in A\}).$$

Om $m = 0$ definierar vi $\gamma_{n,0} = \delta_{\overline{0}}$.

Definition 1.4. Låt $0 \leq s \leq \infty$, $A \subset \mathbb{R}^n$ och $a \in \mathbb{R}^n$. Den övre och nedre s-densiteten för A i punkten a definieras så att

$$\Theta^{*s}(A, a) = \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(A \cap B(a, r))}{(2r)^s},$$
$$\Theta^s_*(A, a) = \liminf_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(A \cap B(a, r))}{(2r)^s}.$$

Om de har samma värde så benämns det gemensamma värdet den s-dimensionella densitet för A i punkten a och betecknas

$$\Theta^s(A, a) = \Theta^{*s}(A, a) = \Theta^s_*(A, a).$$

Definition 1.5. Mängden $E \subset \mathbb{R}^n$ är en s-mängd, där $0 \leq s \leq n$, om E är $\mathcal{H}^s$ mätbar och $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$.

Definition 1.6. En punkt $a \in A$ i en s-mängd är en regelbunden punkt för mängden A om $\Theta^s(A, a) = 1$. I annat fall är punkten a oregelbunden. En s-mängd A är regelbunden om $\mathcal{H}^s$ nästan alla punkter i A är regelbundna. En s-mängd A är oregelbunden om $\mathcal{H}^s$ nästan alla punkter i A är oregelbundna.

1.2 Mätbarhet

Sats 1.7. *Om A är en s-mängd så är funktionerna*

$$f_{r_0}(a) = \sup_{0<r<r_0} \frac{\mathcal{H}^s(A \cap B(a,r))}{(2r)^s} \textit{ och } g_{r_0}(a) = \inf_{0<r<r_0} \frac{\mathcal{H}^s(A \cap B(a,r))}{(2r)^s}$$

Borelfunktioner för alla $r_0 > 0$ och $s > 0$.

Mängden av alla m-dimensionella affina delrum av ett affint delrum $E \subset \mathbb{R}^n$ betecknar vi $A(m,E)$ och vi skriver $A(a,m,E) = \{V \in A(m,E) \colon a \in V\}$. Mängden av alla kompakta mängder i $\mathbb{R}^n$ betecknas $\mathcal{C}$. Mängden av alla affina avbildningar $L \colon E \to E$ är $L(E,E)$. En ortogonal projektion till ett affint delrum V skrivs som π_V. Om A är en mängd i ett metriskt rum X så är $A(\epsilon) = \{x \in X \colon d(x,A) \leq \epsilon\}$.

Definition 1.8. Låt $V_a, W_b \in A(m, \mathbb{R}^m)$, där $V, W \in Gr(m, \mathbb{R}^n)$, $a \in V^\perp$ och $b \in W^\perp$. Vi metriserar $A(m,\mathbb{R}^n)$ genom att definiera

$$d(V_a, W_b) = \|\pi_V - \pi_W\| + |a - b|,$$

där $\|\pi_V - \pi_W\|$ betecknar operatornormen av funktionen ifråga.

Låt $K_1, K_2 \in \mathcal{C}$ vara icke-tomma mängder. Då definierar vi

$$d_H(K_1,K_2) = \inf\{r \colon K_1 \subset K_2(r) \text{ och } K_2 \subset K_1(r)\},$$

$d_H(K_1, \emptyset) = \infty$ och $d_H(\emptyset,\emptyset) = 0$.

Funktionen $(K_1,K_2) \mapsto d_H(K_1,K_2)$ är en Hausdorff metrik i $\mathcal{C} \setminus \emptyset$.

Följande fyra lemman kommer att användas enbart i Kapitel 3.3.3. Bevisen följer Whites bevis [11]. I kapitel 2 definieras Lipschitz funktioner (och beteckningen L_f) och i kapitel 3 definieras rektifierbara mängder.

Lemma 1.9. *Följande funktioner är Borel:*

$$\mathcal{H}^m_\delta \colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n, \tag{1}$$
$$\mathcal{H}^m \colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n, \tag{2}$$
$$G \colon \mathcal{C} \times L(E,E) \to \mathcal{C}, \textit{ där } G(K,F) = F(K), \tag{3}$$
$$H \colon \mathcal{C} \times A(m,\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}, \textit{ där } H(K,V) = K \cap V. \tag{4}$$

Bevis. Låt $\epsilon > 0$, $C \in \mathcal{C}$ och $\mathcal{H}^m_\delta(C) = a$. Då kan vi hitta ett sådant öppet δ-täcke $\{U_i\}$ att $\sum_{i=1}^\infty d(U_i)^m < a+\epsilon$. Om $d_{\mathcal{H}}(C',C)$ är tillräckligt litet innehålls C' i δ-täcket. Följaktligen är $\mathcal{H}^k_\delta(C') < a+\epsilon$, vilket visar att $\mathcal{H}^m_\delta\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ är ovanifrån semikontinuerlig och därmed Borel.

Därmed är $\mathcal{H}^m(C) = \lim_{j=\infty} \mathcal{H}^m_{\frac{1}{j}}(C)$, vilket bevisar (2).

Vi bevisar (3). Låt $\epsilon > 0$, $C \in \mathcal{C}$ och $F \in L(E,E)$. Då finns det ett sådant $k > 1$ att $C \subset B(0,k)$. Då $C' \in B(C,\epsilon/2)$ och $F' \in B(F,\epsilon/2k)$ så är $G(C',F') \in B(G(C,F),\epsilon)$. Funktionen G är därmed kontinuerlig.

Av definitionerna följer också direkt att H är kontinuerlig, ty urbilden av en sluten mängd är en sluten mängd. $\square$

Lemma 1.10. *Låt $E \in \mathcal{C}$ och*

$$\phi(E) = \sup\{\mathcal{H}^1(E \cap C)\colon C \text{ är } 1\text{-rektifierbar}\}.$$

Då är $\phi\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ Borel.

Bevis. Låt A vara mängden av Lipschitz funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ och låt $B \subset A$ bestå av Lipschitz funktioner för vilka gäller att $f(0) = 0$ och $L_f = 1$. Låt

$$\mathcal{C}(m) = \{f([0,m])\colon f \in B\},$$

Fixera m. Mängden $\mathcal{C}(m) \subset \mathcal{C} \setminus \emptyset$ och kan metriseras med Hausdorff metriken. Mängden $\mathcal{C}(m)$ är följdkompakt i den topologin som den ifrågavarande metriken inducerar enligt Arzela-Ascolis sats.

Då $E \in \mathcal{C}$ gäller att

$$\begin{aligned}
\phi(E) &= \sup_{f_i \in A} \mathcal{H}^1(E \cap \cup_{i=1}^\infty f_i(\mathbb{R})) \\
&= \sup_{f \in A} \mathcal{H}^1(E \cap f(\mathbb{R})) \\
&= \sup_{f \in B} \mathcal{H}^1(E \cap f(\mathbb{R})) \\
&= \sup_m \sup_{C \in \mathcal{C}(m)} \mathcal{H}^1(E \cap C) \\
&= \sup_m \sup_{C \in \mathcal{C}(m)} \sup_\delta \mathcal{H}^1_\delta(E \cap C) \\
&= \sup_m \sup_\delta \sup_{C \in \mathcal{C}(m)} \mathcal{H}^1_\delta(E \cap C) \\
&= \sup_m \sup_{\delta \in \mathbb{Q}^+} \sup_{C \in \mathcal{C}(m)} \mathcal{H}^1_\delta(E \cap C).
\end{aligned}$$

Eftersom $E \mapsto \mathcal{H}^1_\delta(E \cap C)$ är ovanifrån semikontinuerlig och $\mathcal{C}(m)$ är kompakt så är funktionen

$$E \mapsto \sup_{C \in \mathcal{C}(m)} \mathcal{H}^1_\delta(E \cap C),$$

ovanifrån semikontinuerlig. Vi visar detta. Låt $E \in \mathcal{C}$. Vi gör motantagandet att

$$\sup_{C \in \mathcal{C}(m)} \mathcal{H}^1_\delta(E \cap C) = c$$

och att det finns en sådan följd kompakta mängder (E_n) att $E_n \to E$ och

$$\sup_{C \in \mathcal{C}(m)} \mathcal{H}^1_\delta(E_n \cap C) > c + \epsilon \text{ för något } \epsilon > 0.$$

Eftersom $\mathcal{C}(m)$ är kompakt kan vi hitta sådana mängder $D_n \in \mathcal{C}(m)$ att

$$\mathcal{H}^1_\delta(E_n \cap D_n) = \sup_{C \in \mathcal{C}(m)} \mathcal{H}^1_\delta(E_n \cap C).$$

Då finns det en kompakt mängd $D \in \mathcal{C}(m)$ och sådana delföljder E_{n_k} och D_{n_k} att $E_{n_k} \to E$ och $D_{n_k} \to D$. Detta implicerar att det för alla $\epsilon_1 > 0$ finns ett sådant $k_0 \in \mathbb{N}$ att då $k \geq k_0$ så är $E_{n_k} \cap D_{n_k} \subset (E \cap D)(\epsilon_1)$. Låt $\mathcal{U}$ vara ett ändligt öppet δ-täcke för $E \cap D$. Det vi visat implicerar att det finns ett sådant $k \in \mathbb{N}$ att $\mathcal{U}$ också är ett δ-täcke för $E_{n_k} \cap D_{n_k}$. Följaktligen skulle

$$\sup_{C \in \mathcal{C}(m)} \mathcal{H}^1_\delta(E \cap C) \geq \mathcal{H}^1_\delta(E \cap D) \geq \mathcal{H}^1_\delta(E_{n_k} \cap D_{n_k}) > c + \epsilon,$$

vilket är en motsägelse. Eftersom ϕ är supremum av en uppräknelig mängd Borelfunktioner så är ϕ en Borelfunktion. □

Lemma 1.11. *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara ett affint delrum, $L \in Gr(1, E)$, $K \subset E$ en kompakt delmängd och låt*

$$\mu_L(K) = \lim_{j \to \infty} \mu_L^{\frac{1}{j}}(K),$$

där

$$\mu_L^\delta(K) = \inf \{\sum_{i=1}^\infty d(\pi_L K_i) \colon K \subset \bigcup_{i=1}^\infty K_i, d(K_i) < \delta \textit{ för alla } i \in \mathbb{N}\}.$$

Låt

$$\nu_L(K) = \sup\{\mu_L(K \cap C) \colon C \textit{ är } 1\textit{-rektifierbar}\}.$$

Då är $(L, K) \mapsto \mu_L(K)$ och $(L, K) \mapsto \nu_L(K)$ Borelfunktioner.

Bevis. Det räcker att visa att funktionerna $f_1(K) = \mu_L(K)$ och $f_2(K) = \nu_L(K)$ är Borelfunktioner för ett fixerat L, ty om L' är en linje så är

$$\mu_{L'}(K) = \mu_L(\rho_{L',L} K),$$

där $\rho_{L',L} \in L(E,E)$ är en isometri som avbildar L' på L. Funktionerna $\rho_{L',L}$ väljs så att avbildningen $L' \mapsto \rho_{L',L}$ är Borel. Funktionen $G\colon \mathcal{C} \times L(E,E) \to \mathcal{C}$ definierad som $G(K, \rho_{L',L}) = \rho_{L',L}K$ är Borel enligt Lemma 1.9 (3). Vi fixerar L. Enligt definitionen för μ_L är därmed beviset för att $\mu_L^\delta(K)$ är ovanifrån semikontinuerlig analogt med beviset för att $\mathcal{H}^1_\delta$ är ovanifrån semikontinuerlig. Följaktligen är f_1 och f_2 Borelfunktioner. $\square$

Följande definition och lemma kommer att användas då vi granskar projektioner av rektifierbara mängder. Närmare bestämt kommer lemmat att användas i beviset för Lemma 3.52.

Definition 1.12. Låt $K \subset \mathbb{R}^n$ vara en kompakt mängd med $0 < \mathcal{H}^m(K) < \infty$. Låt (V, L) vara par där $V \in Gr(n-m+1, \mathbb{R}^n)$ och $L \in Gr(1, V)$. Vi säger att paret är fint med avseende på K om

(1) $\mathcal{H}^1(K \cap V) < \infty$ och

(2) $K \cap V = A \cup B,$ där A kan täckas med uppräkneligt många bilder av C^1-kurvor och $\mathcal{H}^1(\pi_L B) = 0$.

Lemma 1.13. *Om K är kompakt och $\mathcal{H}^m(K) < \infty$, så är mängden av par (V, L) som är fina med avseende på K en Borelmängd.*

Bevis. Paret (V, L) är fint med avseende på K om och endast om

(1′) $$\mathcal{H}^1(K \cap V) < \infty \text{ och}$$

(2′) $$\mu_L(K \cap V) = \nu_L(K \cap V).$$

Att villkor (2′) är ekvivalent med villkor (2) i Definitionen 1.12 följer av att $\mathcal{H}^1(\pi_L K) = 0$ implicerar att $\mu_L K = 0$. Om $K \cap V = A \cup B$ är som i villkor (2) så är nämligen

$$\mu_L(K \cap V) = \mu_L((K \cap V) \setminus B) = \nu_L(K \cap V).$$

Om villkor (2′) är uppfyllt så gäller villkor (2), ty definitionen av rektifierbarhet är densamma oberoende om man använder C^1-funktioner eller Lipschitz funktioner.

Enligt Lemma 1.9 (2) och (4) är $(V, K) \mapsto \mathcal{H}^1(K \cap V)$ en sammansatt funktion av två Borelfunktioner och således en Borelfunktion. Därmed är också $(V, L) \mapsto \mathcal{H}^1(K \cap V)$ en Borelfunktion eftersom funktionsvärdet ej beror av L. Detta visar att mängden av par (V, L) som uppfyller (1) för en given kompakt mängd K är Borel.

Enligt Lemma 1.11 och 1.9 (4) är $f_1(V, L, K) = \mu_L(K)$, $f_2(V, L, K) = \nu_L(K)$ och $g(V, L, K) = K \cap V$ Borelfunktioner. Därmed är $h_i(V, L, K) = f_i(V, L, g(V, L, K))$ Borelfunktioner, där $i = 1, 2$. Således är mängden tripplar (V, L, K) som uppfyller (2) Borel. I och med detta är mängden par (V, L) som uppfyller (2) för en given kompakt mängd K Borel. $\square$

1.3 Grundläggande satser

Sats 1.14. *Låt $0 \leq s < \infty$, $A \subset \mathbb{R}^n$ och $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Då gäller att*

(1) $\quad 2^{-s} \leq \Theta^{*s}(A, x) \leq 1$ *för $\mathcal{H}^s$ nästan alla $x \in A$ och*

(2) $\quad$ *om A är $\mathcal{H}^s$ mätbar, så är $\Theta^{*s}(A, x) = 0$ för nästan alla $x \in \mathbb{R}^n \backslash A$.*

Korollarium 1.15. *Låt A och B vara $\mathcal{H}^s$ mätbara delmängder av $\mathbb{R}^n$ för vilka gäller att $B \subset A$ och $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Då gäller för $\mathcal{H}^s$ nästan alla $x \in B$ att*

$$\Theta^{*s}(B, x) = \Theta^{*s}(A, x) \text{ och } \Theta^s_*(B, x) = \Theta^s_*(A, x).$$

Korollarium 1.16. *Om E är en s-mängd så är mängden av regelbundna punkter i E regelbunden och mängden av oregelbundna punkter i E är en oregelbunden mängd ifall respektive mängder har positivt $\mathcal{H}^s$ mått.*

Sats 1.17. *Om $E \subset \mathbb{R}^n$ och $\mathcal{H}^m(E) < \mathbb{R}^n$ så är*

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{U \ni x,\, d(U) < \delta} \frac{\mathcal{H}^m(E \cap U)}{d(U)^m} = 1,$$

för $\mathcal{H}^m$ nästan alla $x \in E$.

Följande två lemman är hämtade ur Mattila [9]. De kommer att användas då vi karakteriserar rektifierbara mängder med densitet och projektioner.

Lemma 1.18. *Låt k och m vara sådana heltal att $0 \leq k \leq n-1$, $0 \leq m \leq n-1$, $k+m \leq n$ och låt $W \in Gr(k, \mathbb{R}^n)$. Då är*

$$\gamma_{n,m}(\{V \in Gr(m, \mathbb{R}^n) \colon V \cap W \neq \{\bar{0}\}\}) = 0.$$

Korollarium 1.19. *Om $W \in Gr(m, \mathbb{R}^n)$ så är $\pi_V|_W \colon W \to V$ är bijektiv för $\gamma_{n,m}$ nästan alla $V \in G(m, \mathbb{R}^n)$.*

De två följande satserna respektive lemmana behandlar nätmått och bevisas på nästan exakt samma sätt som i Falconer [3]. Sats 1.23 kommer att användas då vi karakteriserar rektifierbara mängder med projektioner.

Sats 1.20. *Om $E \subset \mathbb{R}^n$ så är*

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \mathcal{M}^s_\delta(E) \leq c_n \mathcal{H}^s_\delta(E) \text{ då } 0 < \delta < 1,$$

där $c_n = 3^n 2^{n^2}$. Därmed är

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{M}^s(E) \leq c_n \mathcal{H}^s(E).$$

Bevis. Låt $E \subset \mathbb{R}^n$. I och med att infimimum är över en mindre mängd för $\mathcal{M}^s_\delta$ så är $\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \mathcal{M}^s_\delta(E)$. Låt $\delta > 0$ och låt U vara en sådan godtycklig mängd att $0 < d(U) < \delta$. Vi väljer ett sådant $k \in \mathbb{R}$ att $2^{-k-1} < d(U) < 2^{-k}$. Låt Q_U vara en n-dimensionell halvöppen binär kub med sidlängden 2^{-k} som skär U. Då täcks U av mängderna i $\mathcal{Q}_U$ som är de 3^n binära kuber som utgörs av Q_U och dess närmaste grannar av binära kuber. Vi delar in varje kub i $\mathcal{Q}_U$ i 2^{n^2} mindre kuber som är sinsemellan kongruenta. Därmed har vi visat att U tillhör en union av $c_n = 3^n 2^{n^2}$ binära kuber vars diameter är

$$2^{-k} n^{\frac{1}{2}} 2^{-n} < 2^{1-n} n^{\frac{1}{2}} d(U) < d(U) < \delta.$$

Låt $\{U_i\}$ vara ett δ-täcke för E. För alla $i \in \mathbb{N}$ gäller att $U_i \subset \{Q_{ij}\}_{j=1}^{c_n}$, där Q_{ij} är binära kuber vars diameter är mindre än $d(U_i)$. Således är $\mathcal{M}^s_\delta(E) \leq c_n \mathcal{H}^s_\delta(E)$ och därmed är också $\mathcal{M}^s(E) \leq c_n \mathcal{H}^s(E)$.

□

Lemma 1.21. *Låt (E_j) vara en sådan växande följd av delmängder av $\mathbb{R}^n$ att varje E_j är en ändlig union av binära kuber. Då är*

$$\mathcal{M}^s_\delta(\lim_{j\to\infty} E_j) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{M}^s_\delta(E_j).$$

Bevis. Om $s > n$ är båda leden likamed noll. Vi kan därför anta att $s \leq n$. Vi betecknar $E = \lim_{j\to\infty} E_j = \cup E_j$. Eftersom $\mathcal{M}^s_\delta(E_j) \leq \mathcal{M}^s_\delta(E)$ för alla j så är $\mathcal{M}^s_\delta(E) \geq \lim_{j\to\infty} \mathcal{M}^s_\delta(E_j)$.

Vi fixerar ett j. Då E_j är en ändlig union av binära kuber och $s \leq n$ så existerar det åtminstone ett sådant ändligt δ-täcke $\mathcal{A}_j$ av disjunkta binära kuber att

$$\sum_{A\in\mathcal{A}_j} d(A)^s = \mathcal{M}^s_\delta(E_j).$$

Varje täcke $\mathcal{A}_j$ kan väljas så att det är det numerärt sett minsta av dylika täcken. Anta att $P \in \mathcal{A}_j$. Då måste P innehålla en punkt $x \in E_j$. Då $E_j \subset E_{j+1}$ så existerar en mängd $Q \in \mathcal{A}_{j+1}$ i vilken x är ett element. Med tanke på hur familjen av binära kuber definierades så bör nu gälla att $P \subset Q$ eller $Q \subset P$. Om Q är en äkta delmängd av P så kan vi antingen byta ut P mot de kuber i $\mathcal{A}_{j+1}$ som är delmängder av P för förminska $\sum_{A\in\mathcal{A}_j} d(A)^s$, eller så kan vi byta ut kuberna i $\mathcal{A}_{j+1}$ som finns i P mot Q och på så sätt antingen förminska $\sum_{A\in\mathcal{A}_{j+1}} d(A)^s$ eller förminska $\mathcal{A}_{j+1}$ numerärt. Detta skulle leda till motsägelser och vi kan därför sluta oss till att P är en delmängd av Q.

Låt $\mathcal{Q}'$ vara mängden av kuber som är element i $\cup_{j=1}^{\infty}\mathcal{A}_j$. Låt $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ vara mängden av kuber i $\mathcal{Q}'$ som inte är en äkta delmängd av något annat element i $\mathcal{Q}'$. Då är $E_j \subset \cup_{i=1}^{\infty} Q_i$ för alla $j \in \mathbb{N}$. Därmed är $E \subset \cup_{i=1}^{\infty} Q_i$ och

$$\mathcal{M}^s_\delta(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} d(Q_i)^s.$$

För ett givet $k \in \mathbb{N}$ existerar ett sådant $j(k) \in \mathbb{N}$ att $Q_i \in \mathcal{A}_{j(k)}$ då $i \leq k$. Därmed är

$$\mathcal{M}_\delta^s(E) \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} d(Q_i)^s \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{Q\in\mathcal{A}_{j(k)}} d(Q)^s = \lim_{k\to\infty} \mathcal{M}_\delta^s(E_{j(k)}) \leq \lim_{k\to\infty} \mathcal{M}_\delta^s(E_j),$$

vilket skulle bevisas. □

Lemma 1.22. *Låt $A \subset \mathbb{R}$, låt (I_i) vara en följd av binära intervall som utgör ett δ-täcke till A, låt (a_i) vara en följd av positiva tal och låt c vara en sådan konstant att*

$$\sum_{\{i:\, x\in I_i\}} a_i > c$$

för alla $x \in A$. Då är

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i |I_i|^s \geq c\mathcal{M}_\delta^s(A).$$

Bevis. Vi antar först att följderna (I_i) och (a_i) är ändliga. Genom att förminska varje a_i något så att antagandet fortfarande gäller kan vi utgå från att varje a_i är rationellt. Vidare kan vi genom att multiplicera med en gemensam nämnare för talen a_i anta att alla a_i är heltal. Om $a_j = k(j) \in \mathbb{N}$ kan vi förändra följden (I_i) så att intervallet I_j innehålls $k(j)$ antal gånger. Därmed räcker det att bevisa påståendet då $a_i = 1$ för alla i.

Under dessa antaganden kommer varje $x \in A$ att höra till åtminstone $\lceil c \rceil$ intervall i följden (I_i). Med stöd av nätegenskapen för (I_i) kan vi genom att välja alla de intervall I_j i följden som inte är delmängder av något annat intervall bilda ett täcke av disjunkta mängder för A. Vi kallar unionen av dessa intervall för $\mathcal{A}_1$. Analogt gäller nu att varje $x \in A$ hör till åtminstone $\lceil c-1 \rceil$ intervall i följden (I_i) som inte hör till $\mathcal{A}_1$. På motsvarande sätt kan vi nu bilda mängden $\mathcal{A}_2$. Proceduren kan upprepas totalt $\lceil c \rceil$ gånger. Därmed är

$$\sum_{I_i\in\mathcal{A}_j} |I_i|^s \geq \mathcal{M}_\delta^s(A),$$

för $j = 1, 2, \ldots, \lceil c \rceil$. Satsen är därmed bevisad för fallet då (I_i) är ändlig.

Om (I_i) är en oändlig följd av binära intervall låt

$$A_k = \{x \in \mathbb{R} \sum_{\substack{\{i:x\in I_i\}\\ i\leq k}} a_i > c\}$$

för varje k. Av det ändliga fallet följer att

$$\sum_{i=1}^{k} |I_i|^s \geq c\mathcal{M}_\delta^s(A_k).$$

Varje A_k är en ändlig union av binära intervall, följden (A_k) är växande och $A \subset \cup A_k = \lim_{k\to\infty} A_k$. Av Lemma 1.21 följer att

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|^s \geq c \lim_{k\to\infty} \mathcal{M}_\delta^s(A_k) = c\mathcal{M}_\delta^s(\lim_{k\to\infty} A_k) \geq c\mathcal{M}_\delta^s(A).$$

$\square$

Då $E \subset \mathbb{R}^2$ betecknar vi $E_{x_1} = \{(x, y) \in E \colon x = x_1\}$.

Sats 1.23. *Låt $E \subset \mathbb{R}^2$, låt A vara en delmängd av x-axeln och låt $c > 0$. Om $\mathcal{H}^t(E_x) > 0$ för alla $x \in A$ så är*

$$\mathcal{H}^{s+t}(E) \geq bc\mathcal{H}^s(A),$$

där $b = b(s,t) = \frac{s^{\frac{1}{2}(s+t)}}{144}$.

Bevis. Med stöd av Sats 1.20 räcker det att bevisa påståendet för konstanten $s^{\frac{1}{2}(s+t)}$ med Hausdorffmåttet $\mathcal{H}$ utbytt mot nätmåttet $\mathcal{M}$. Låt $\delta > 0$ och låt $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ vara en familj binära kuber som utgör ett $2^{\frac{1}{2}}\delta$-täcke till E. För varje $x \in E$ gäller att

$$E_x \subset \cup (S_i)_x.$$

Därmed är

$$\mathcal{M}_\delta^t(E_x) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |(S_i)_x|^t.$$

Om $A_\delta = \{x \in A \colon \mathcal{M}_\delta^t(E_x) > c\}$ så är

$$c < \sum_{i=1}^{\infty} |(S_i)_x|^t = 2^{-\frac{1}{2}t} \sum_{\{i \colon x \in \pi_1 S_i\}} |S_i|^t,$$

för alla $x \in A_\delta$, där $\pi_1 S_i$ är en ortogonal projektion av S_i till x-axeln. Således är

$$\sum_{i=1}^{\infty} |S_i|^{s+t} = \sum_{i=1}^{\infty} |S_i|^t |S_i|^s = 2^{\frac{1}{2}s} \sum_{i=1}^{\infty} |S_i|^t |\pi_1 S_i|^s \geq 2^{\frac{1}{2}(s+t)} c\mathcal{M}_\delta^s(A_\delta).$$

Den sista olikheten följer av Lemma 1.22 då $I_i = \pi_1 S_i$ och $a_i = |S_i|^t$. Ovanstående gäller för varje $2^{\frac{1}{2}}\delta$-täcke bestående av binära kvadrater $\{S_i\}$. Således är

$$dc\mathcal{M}^s_\delta(A_\delta) \leq \mathcal{M}^{s+t}_{2^{\frac{1}{2}}\delta}(E) \leq \mathcal{M}^{s+t}(E),$$

där $d = s^{\frac{1}{2}(s+t)}$. Eftersom A_δ växer mot A då δ går mot 0 så är

$$dc\mathcal{M}^s_\delta(A_\rho) \leq dc\mathcal{M}^s_\delta(A_\delta) \leq \mathcal{M}^{s+t}(E)$$

om $\delta \leq \rho$. Om $\rho > 0$ så är följaktligen

$$dc\mathcal{M}^s(A_\rho) \leq \mathcal{M}^{s+t}(E).$$

Eftersom måttet $\mathcal{M}$ är ytterregelbundet är $\mathcal{M}^s(\lim_{\rho\to 0} A_\rho) = \mathcal{M}^s(A)$ även om mängderna i fråga inte är mätbara. Därmed är

$$dc\mathcal{M}^s(A) \leq \mathcal{M}^{s+t}(E).$$

$\square$

Vi bevisar inte de två följande satserna. I Holopainen [6] bevisas Sats 1.24 för fallet $c = 5$. En smärre förändring av beviset ger nedanstående sats. Beviset för den senare satsen hittas i exempelvis Mattila [9]. I litteraturen kallas också den senare satsen för Vitalis täckessats. Satserna bevisas med standardmetoder inom måtteori.

Sats 1.24. Vitalis täckessats. *Låt $c > 3$ och $\mathcal{B}$ vara en godtycklig familj av sådana slutna kulor i $\mathbb{R}^n$ att*

$$\sup\{d(B)\colon B \in \mathcal{B}\} < \infty.$$

Då finns det en uppräknelig (möjligen ändlig) följd av sådana disjunkta kulor $B_i \in \mathcal{B}$ att

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} cB_i.$$

Sats 1.25. *Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ och låt $\mathcal{F}$ vara en sådan familj av slutna kulor i $\mathbb{R}^n$ att*

$$\inf\{d(B)\colon x \in B \in \mathcal{F}\} = 0 \textit{ då } x \in A$$

Då existerar det sådana disjunkta kulor $B_i \in \mathcal{F}$ att

$$\mathcal{L}^n(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0.$$

Dessutom kan vi för ett givet $\epsilon > 0$ välja sådana kulor $B_i \in \mathcal{F}$ att

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_i) \leq \mathcal{L}^n(A) + \epsilon.$$

Kapitel 2

Lipschitz funktioner

Lipschitz funktioner kommer att spela en essentiell roll i definitionen av rektifierbara mängder. Egenskaper för Lipschitz funktioner och egenskaper för rektifierbara mängder är nära besläktade.

2.1 Differentierbarhet, undre densitet och nivåytor

Definition 2.1. En funktion $f\colon A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är en Lipschitz funktion om det finns en sådan konstant $L < \infty$ att

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \text{ för } x, y \in A.$$

Infimumet av sådana konstanter L betecknar vi L_f.

Nästa lemma bevisas med standardmetoder inom reell analys. För bevis se exempelvis Hajlasz [5].

Lemma 2.2. *Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd. Om $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ och $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0$ för alla $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ så är $f = 0$ $\mathcal{L}^n$ nästan överallt.*

Med $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ avses att funktionen f är integrerbar i varje kompakt mängd i Ω. Funktionen $\varphi \in C_0^\infty$ är slät och $\overline{\{x \in \Omega\colon \varphi(x) \neq 0\}}$ är kompakt.

De kommande bevisen i detta kapitel följer minutiöst bevisen i Mattila [9]. Beviset för Rademachers sats finns också i Simon [11].

Sats 2.3. Rademachers sats. *Om $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är en Lipschitz funktion, så är f deriverbar $\mathcal{L}^m$ nästan överallt i $\mathbb{R}^m$.*

Bevis. För att bevisa Rademachers sats bör man enligt definitionen för differentierbarhet visa att det existerar en sådan lineär funktion $J_{x_0}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ att

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - J_{x_0}(h)|}{h} = 0$$

för nästan alla $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Vi antar att fallet då $m = n = 1$ är känt. För bevis se Holopainen [6].

Vi antar inledningsvis att $n = 1$. Då $e \in S^{m-1}$ och $x \in \mathbb{R}^m$ betecknar vi derivatan för f i riktning e med $\partial_e f(x)$. Vi betecknar

$$B_e = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \partial_e f(x) \text{ existerar inte}\}.$$

Funktionerna

$$x \mapsto \sup_{0<h<h_1} \frac{f(x+he) - f(x)}{h} \text{ och } x \mapsto \inf_{0<h<h_1} \frac{f(x+he) - f(x)}{h}$$

är Borelfunktioner för alla $h_1 > 0$, ty f är kontinuerlig och således förändras inte supremum och infimum om vi antar att $h \in \mathbb{Q}$. Därmed är B_e en Borelmängd. Genom att tillämpa specialfallet då $m = n = 1$ på $t \mapsto f(x+te)$ kan vi sluta oss till att det för alla $x \in \mathbb{R}^m$ gäller att

$$\mathcal{H}^1(B_e \cap \{x + te\colon t \in \mathbb{R}\}) = 0.$$

Vi betecknar linjen i riktning e med L_e. Vi betraktar $\mathbb{R}^m$ som den kartesiska produkten $L_1 \times \cdots \times L_{m-1} \times L_e$ där $L_1, \ldots, L_{m-1}$ är linjer som är parvis vinkelräta och vinkelräta mot L_e. Av Fubinis sats följer då att $\mathcal{L}^m(B_e) = 0$. Därmed har vi visat att för ett godtyckligt $e \in S^{m-1}$ så existerar $\partial_e f(x)$ för nästan alla $x \in \mathbb{R}^m$.

Härnäst visar vi att

$$\partial_e f(x) = e \cdot \nabla f(x) \text{ för } \mathcal{L}^m \text{ nästan alla } x \in \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

Vi betecknar $\partial_i f(x) = \partial_{e_i} f$, där $\{e_i\}_1^m$ är standardbasen för $\mathbb{R}^m$. Låt $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Då $h \neq 0$ gäller att

$$\begin{aligned}
\int h^{-1}[f(x+he) - f(x)]\varphi(x)dx &= \int h^{-1} f(x+he)\varphi(x)dx - \int h^{-1} f(x)\varphi(x)dx \\
&= \int h^{-1} f(x)\varphi(x-he)dx - \int h^{-1} f(x)\varphi(x)dx \\
&= \int h^{-1}[\varphi(x) - \varphi(x-he)] f(x)dx.
\end{aligned}$$

Eftersom både f och φ är Lipschitz så är

$$|\frac{f(x+he)-f(x)}{h}| \leq L_f \text{ och } |\frac{\varphi(x+he)-\varphi(x)}{h}| \leq L_\varphi.$$

Därmed kan vi tillämpa dominerade konvergenssatsen och erhålla

$$\begin{aligned}
&\int \partial_e f(x)\varphi(x)dx = -\int f(x)\partial_e\varphi(x)dx \\
&= -\int f(x)(e\cdot\nabla\varphi(x))dx = -\sum_{j=1}^m e\cdot e_j \int f(x)\partial_j\varphi(x)dx \\
&= \sum_{j=1}^m e\cdot e_j \int \varphi(x)\partial_j f(x)dx = \int \varphi(x)(e\cdot\nabla f(x))dx.
\end{aligned}$$

Eftersom detta gäller för alla $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ så följer (1) av Lemma 2.2.

Låt $\{d_1, d_2, \ldots\}$ vara en tät mängd i S^{m-1}. För varje $i \in \mathbb{N}$ låt A_i vara mängden av alla $x \in \mathbb{R}^m$ för vilka $\nabla f(x)$ och $\partial_{d_i} f(x)$ existerar och $\partial_{d_i} f(x) = d_i \cdot \nabla f(x)$. Vi betecknar $A = \cap_{i=1}^\infty A_i$. Då följer av det vi redan bevisat att $\mathcal{L}^m(\mathbb{R}^m \setminus A) = 0$.

Vi visar nu att f är deriverbar i alla punkter i A. För $a \in A$, $e \in S^{m-1}$ och $h > 0$, låt

$$Q(x,e,h) = \frac{f(x+he)-f(x)}{h} - e\cdot\nabla f(x).$$

Om $e, e' \in S^{m-1}$ så är

$$|Q(x,e,h) - Q(x,e',h)| \leq (\sqrt{m}+1)L_f|e-e'|.$$

Låt $\epsilon > 0$. Eftersom S^{m-1} är kompakt så existerar det ett sådant $N \in \mathbb{N}$ att om $e \in S^{m-1}$ så är $|e - e_1| < \epsilon/(2(\sqrt{m}+1)L)$ för något $i \in \{1,\ldots,N\}$. Av definitionen för A följer att $\lim_{h\to 0} Q(x,e_i,h) = 0$ för alla i. Följaktligen existerar det ett sådant $\delta > 0$ att

$$|Q(x,e_i,h)| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ då } 0 < h < \delta \text{ och } i \in \{1,\ldots,N\}.$$

Därmed gäller att om $e \in S^{m-1}$ och $0 < h < \delta$ så kan vi välja ett $i \in \{1,\ldots,N\}$ så att $|e - e_1| < \epsilon/(2(\sqrt{m}+1)L)$ och

$$|Q(x,e,h)| \leq |Q(x,e,h) - Q(x,e_i,h)| + |Q(x,e_i,h)| < (\sqrt{m}+1)L_f|e-e'| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Anta slutligen att funktionen $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ har komponentfunktionerna $f_1,\ldots,f_n$, d.v.s. $f = \{f_1,\ldots,f_n\}$. Komponentfunktionerna till den sökta funktionen J_{x_0} är därmed $h \mapsto h\cdot\nabla f_i(x_0)$.

$\square$

Sats 2.4. *Om $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är en Lipschitz funktion, $s \geq 0$ och $A \subset \mathbb{R}^m$, så är*

$$\mathcal{H}^s(fA) \leq L_f^s \mathcal{H}^s(A),$$

vilket implicerar att

$$\dim(fA) \leq \dim A.$$

Sats 2.5. *Om $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är en Lipschitz funktion så är*

$$\mathcal{H}^m(\{f(x)\colon f'(x) \textit{ existerar och } \dim(f'(x)\mathbb{R}^m) < m\}) = 0.$$

Bevis. Vi kan anta att $m \leq n$, annars är beviset trivialt. Låt $0 < R < \infty$ och låt

$$A_R = \{x \in B(0,R)\colon f'(x) \text{ existerar och } \dim(f'(x)\mathbb{R}^m) < m\}.$$

Fixera R. Låt $0 < \epsilon < L$, där $L = L_f$. Det räcker att visa att $\mathcal{H}^m(f(A_R)) = 0$. Vi skriver $W_x = f'(x)\mathbb{R}^m + f(x) = \{f'(x)y + f(x)\colon y \in \mathbb{R}^m\}$. Då kommer det för tillräckligt små $r > 0$ gälla att

$$fB(x,r) \subset B(f(x), Lr) \cap W_x(\epsilon r),$$

enligt definitionen för derivata och W_x. Eftersom $\dim W_x \leq m-1$ så är $fB(x,r)$ innesluten i ett n-dimensionellt rätblock med måttet $\underbrace{2Lr \times \cdots \times 2Lr}_{m-1} \times \underbrace{2\epsilon r \times \cdots \times 2\epsilon r}_{n-(m-1)}$. Det n-dimensionella rätblocket kan täckas med $(\frac{L}{\epsilon}+1)^{m-1}$ n-dimensionella kuber med sidlängden $2\epsilon r$. Således är

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^n_\infty(fB(x,r)) &\leq (\frac{2L}{\epsilon})^{m-1}(2\epsilon r\sqrt{n})^m \\ &= c\epsilon r(Lr)^{m-1},\end{aligned}$$

där $c = c(n,m) = 2^{2m-1}n^{\frac{m}{2}}$. Enligt Sats 1.25 finns det sådana disjunkta kulor $B_i = B(x_i, r_i)$ att

$$\mathcal{L}^m(A_R \setminus \bigcup_{i=1}^\infty B_i) = 0 \text{ och } \sum_{1=1}^\infty \mathcal{L}^m(B_i) < \mathcal{L}^m(A_R) + \epsilon.$$

Därmed är $fA_R \subset (\cup_{i=1}^\infty fB_i) \cup f(A_R \setminus \cup_{i=1}^\infty B_i)$ och $\mathcal{H}^m f(A_R \setminus \cup_{i=1}^\infty B_i) = 0$ enligt Sats 2.4. Följaktligen är

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^m_\infty(fA_R) &\leq \sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}^m_\infty(fB_i) \leq cL^{m-1}\epsilon\sum_{i=1}^\infty r_i^m \\ &\leq cL^{m-1}\epsilon\frac{(\mathcal{L}^m(A_R)+\epsilon)}{\alpha(m)}.\end{aligned}$$

Detta implicerar att $\mathcal{H}^m(fA_R) = 0$ eftersom $\epsilon > 0$ var godtyckligt.

$\square$

Sats 2.6. *Om $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är en Lipschitz funktion och $A \subset \mathbb{R}^m$ är $\mathcal{L}^m$ mätbar så är $\Theta_*^m(fA, x) > 0$ för $\mathcal{H}^m$ nästan alla $x \in fA$.*

Bevis. Vi kan anta att $\mathcal{L}^m(A) < \infty$, ty om så inte är fallet kan vi ersätta A med $A \cap B(0, r)$, där $r > 0$. Låt $\epsilon > 0$,

$$C_\epsilon = \{y \in fA\colon \Theta_*^m(fA, y) < \epsilon\},$$

och låt U vara en sådan öppen mängd att $A \subset U$ och $\mathcal{L}^m(U) < \infty$. Det räcker att visa att

$$\mathcal{H}^m(C_\epsilon) < c\epsilon\mathcal{L}^m(U),$$

där c beror endast av L_f och m.

Måttet $\mathcal{H}^m \llcorner C_\epsilon$ är ett Radonmått eftersom $\mathcal{H}^m(C_\epsilon) < \infty$ och $\mathcal{H}^m$ är ett Borelmått. Enligt Vitalis täckessats för Radonmått finns det därmed sådana disjunkta slutna kulor $B_i = B(y_i, r_i)$ och sådana punkter $x_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots$ att $f(x_i) = y_i \in C_\epsilon$,

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}^m(fA \cap B_i) < \epsilon d(B_i)^m, \\ &D_i = B(x_i, \frac{r_i}{L_f}) \subset U \text{ och} \\ &\mathcal{H}^m(C_\epsilon \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0. \end{aligned}$$

Då är D_i disjunkta mängder eftersom $fD_i \subset B_i$. Följaktligen är

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^m(C_\epsilon) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^m(C_\epsilon \cap B_i) \leq \epsilon \sum_{i=1}^{\infty} d(B_i)^m \\ &= c\epsilon \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^m(D_i) \leq c\epsilon\mathcal{L}^m(U), \end{aligned}$$

där $c = c(L_f, m) = (2L_f)^m(\alpha(m))^{-1}$.

□

Då vi karakteriserar rektiferbara mängder med hjälp av densitet kommer vi att visa att om $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är en Lipschitz funktion och $A \subset \mathbb{R}^m$ är $\mathcal{L}^m$ mätbar så är $\Theta^m(fA, x) = 1$ för $\mathcal{H}^m$ nästan alla $x \in fA$.

I följande sats som behandlar Hausdorff måttet för nivåytor betecknar vi med $\int^*$ den övre integralen. Satsen kommer att användas i Lemma 3.51 då vi undersöker projektioner av rektifierbara mängder.

Sats 2.7. *Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ och låt $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ vara en Lipschitz funktion. Om $m \leq s \leq n$ så är*

$$\int^* \mathcal{H}^{s-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\,\mathrm{d}\mathcal{L}^m y \leq \alpha(m) L_f^m \mathcal{H}^s(A).$$

Bevis. För varje $k = 1, 2, \ldots$ täcker vi mängden A med sådana mängder $E_{k,1}, E_{k,2}, \ldots$ att $d(E_{k,i}) \leq 1/k$ och

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(E_{k,i})^s \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k}.$$

Vi betecknar

$$F_{k,i} = \{y \in \mathbb{R}^m \colon E_{k,i} \cap f^{-1}\{y\} \neq \emptyset\}.$$

Om $y_1, y_2 \in F_{k,i}$ så finns det sådana $x_1, x_2 \in A \cap E_{k,i}$ att $f(x_1) = y_1$ och $f(x_2) = y_2$, ty definitionsmängden för funktionen f är A. Då är

$$|y_2 - y_1| \leq L_f |x_2 - x_1| \leq L_f d(E_{k,i})$$

och följaktligen är

(1) $$\mathcal{L}^m(F_{k,i}) \leq \alpha(m)(L_f d(E_{k,i}))^m.$$

Då är

$$\begin{aligned}
&\int^* \mathcal{H}^{s-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\,\mathrm{d}\mathcal{L}^m y \\
&= \int^* \lim_{k\to\infty} \mathcal{H}^{s-m}_{\frac{1}{k}}(A \cap f^{-1}\{y\})\,\mathrm{d}\mathcal{L}^m y \\
&\leq \int \liminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} d(E_{k,i} \cap f^{-1}\{y\})^{s-m}\,\mathrm{d}\mathcal{L}^m y \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{F_{k,i}} d(E_{k,i} \cap f^{-1}\{y\})^{s-m}\,\mathrm{d}\mathcal{L}^m y \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} d(E_{k,i})^{s-m} \mathcal{L}^m(F_{k,i}) \\
&\leq \alpha(m) L_f^m \liminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} d(E_{k,i})^s \\
&\leq \alpha(m) L_f^m \liminf_{k\to\infty} (\mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k}) \\
&\leq \alpha(m) L_f^m \mathcal{H}^s(A).
\end{aligned}$$

I den andra olikheten ovan använde vi Fatous lemma och den fjärde olikheten följde av (1). □

2.2 Approximering med C^1 funktioner och approximativt deriverbara funktioner

Definition 2.8. Låt $f\colon A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Punkten $l \in \mathbb{R}^n$ är ett approximativt gränsvärde för funktionen f i punkten $x \in A$, vilket vi betecknar

$$ap \lim_{y \to x} f(y) = l,$$

om det finns en sådan mängd $B \subset A$ att $\Theta^m(B, a) = 1$ och

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in B}} f(y) = l.$$

Definition 2.9. Låt $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Funktionen f är approximativt deriverbar i punkten $x_0 \in \mathbb{R}^m$ om det existerar en sådan linjär funktion $L_{x_0}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ att

$$ap \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - L_{x_0}(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0$$

Sats 2.10. *Låt $f\colon A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ vara en Lebesgue mätbar funktion. Då är följande villkor ekvivalenta:*

(1) *Funktionen f är approximativt deriverbar nästan överallt i A.*

(2) *De approximativa partialderivatorna $ap\ D_i f$, $1 \leq i \leq m$, existerar nästan överallt.*

(3) *Det existerar sådana mängder $A_i \subset A$ att $\mathcal{H}^m(A \setminus \cup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$ och $f|_{A_i}$ är Lipschitz.*

Sats 2.11. Whitneys utvidgningssats. *Om $A \subset \mathbb{R}^n$ är sluten, $f\colon C \to \mathbb{R}$ och $v\colon C \to \mathbb{R}^n$ är kontinuerliga i varje kompakt mängd $K \subset C$ och om*

$$\lim_{\delta \to 0} \rho_K(\delta) = 0,$$

där

$$\rho_K(\delta) = \sup\{|R(x, y)| \colon 0 < |x - y| \leq \delta, x, y \in K\}$$

och

$$R(x, y) = \frac{f(y) - f(x) - v(x) \cdot (y - x)}{|y - x|}, x \neq y,$$

så finns det en sådan C^1 funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ att $g = f$ och $\nabla g = v$ i mängden A.

Vi bevisar inte de två ovanstående satser. Se exempelvis Federer [4] för beviset av den tidigare satsen. Beviset liknar beviset för Rademachers sats. Den senare satsen är bevisad i Evans och Gariepy [2]. Ett bevis för Whitneys utvidgningssats då $n = 1$ kan också hittas i Simon [11]. Följande sats är ur Evans och Gariepy [2].

Sats 2.12. *Anta att $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är en Lipschitz funktion. För varje $\epsilon > 0$ existerar en sådan C^1-funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ att*

$$\mathcal{L}^n\{(x\colon g(x) \neq f(x) \text{ eller } g'(x) \neq f'(x)\} \leq \epsilon.$$

Bevis. Enligt Rademachers sats finns det en sådan mängd $A \subset \mathbb{R}^n$ att $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0$ och f är deriverbar i A. Låt $\epsilon > 0$. Enligt Luzins sats finns det en sådan sluten mängd $B \subset A$ att $f'|_B$ är kontinuerlig och $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus B) < \epsilon/2$. Vi skriver $v(x) \equiv f'(x)$ och

$$R(x,y) \equiv \frac{f(y) - f(x) - v(x) \cdot (y - x)}{|x - y|}, \text{ då } x \neq y.$$

Vi definierar ytterligare funktionen

$$\eta_k(x) \equiv \sup\{|R(x,y)|\colon y \in B, 0 < |x - y| \leq \frac{1}{k}\}.$$

Då är

$$\lim_{k\to\infty} \eta_k(x) = 0, \text{ för alla } x \in B.$$

Av Egorovs sats följer att det existerar en sådan sluten mängd $C \subset B$ att $\mathcal{L}^n(B \setminus C) < \epsilon/2$ och

$$\eta_k \to 0 \text{ då } k \to 0 \text{ likformigt i kompakta delmängder av } C.$$

Antagandena i Whitneys utvidgningssats gäller således för funktionerna f och v i mängden C. Vi visar detta. Låt $\epsilon_1 > 0$, fixera $x_0 \in C$ och låt $K = B(x_0, 1) \cap C$. Låt $x, y \in C$. Då existerar ett sådant $0 < \delta < 1$ att då $x \in K$ är $\eta_{\frac{1}{2\delta}}(x) < \epsilon_1$. Om $|x - x_0| < \delta$ och $|y - x_0| < \delta$, så är naturligtvis $x, y \in K$. Detta implicerar då $x \neq y$ att $|R(x,y)| < \epsilon_1$, vilket bevisar påståendet. $\square$

Kapitel 3

Rektifierbara mängder

3.1 Definition och uppdelning

Definition 3.1. En mängd $E \subset \mathbb{R}^n$ är m-rektifierbar, även kallat m-uträtbar, om det existerar sådana Lipschitz funktioner $f_i \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots,$ att

$$\mathcal{H}^m(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^m)) = 0.$$

En mängd F är helt m-orektifierbar om $\mathcal{H}^m(E \cap F) = 0$ för alla m-rektifierbara mängder E.

Av definitionen följer omedelbart att alla delmängder av $\mathbb{R}^n$ är m-rektifierbara om $m \geq n$. En 0-rektifierbar mängd är en uppräknelig mängd. I fortsättning kommer vi därför att anta att $0 < m < n$. Av Sats 2.12 följer att definitionen inte förändras om vi kräver att funktionerna är kontinuerligt deriverbara istället för Lipschitz.

För att en mängd $E \subset \mathbb{R}^n$ skall vara m-rektifierbar krävs inte att mängden är mätbar eller har ändligt $\mathcal{H}^m$ mått. Då vi karakteriserar rektifierbara mängder kommer dock användningen av Sats 1.14 (2) leda till att vi gör dessa antaganden.

Sats 3.2. *Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ vara sådan att $\mathcal{H}^m(A) < \infty$. Då är $A = E \cup F$, där E är m-rektifierbar, F är helt m-orektifierbar och $\mathcal{H}^m(E \cap F) = 0$.*

Bevis. Låt

$$M = \sup \mathcal{H}^1(A \cap B),$$

där supremum är över alla rektifierbara mängder B. Välj sådana rektifierbara mängder E_i att $\mathcal{H}^1(A \cap B) > M - 1/i$. Då är $E = \cup E_i$ och $F = A \setminus B$ de sökta mängderna.

□

3.2 Lineär approximerbarhet

Definition 3.3. Mängden $E \subset \mathbb{R}^n$ är m-lineärt approximerbar om följande gäller för $\mathcal{H}^m$ nästan alla $a \in E$: om η är ett positivt tal så existerar det positiva tal r_0 och λ som beror av a och η och det finns ett sådant affint plan $W \in A(a, m, \mathbb{R}^n)$ att det för alla $0 < r < r_0$ gäller att

$$\mathcal{H}^m(E \cap B(x, \eta r)) > \lambda r^m \text{ för } x \in W \cap B(a, r) \tag{3.4}$$

och

$$\mathcal{H}^m(E \cap B(a, r) \backslash W(\eta r)) < \eta r^m. \tag{3.5}$$

Definition 3.6. Mängden $E \subset \mathbb{R}^n$ är svagt m-lineärt approximerbar om det för $\mathcal{H}^m$ nästan alla $a \in E$ gäller att: om η är ett positivt tal så existerar det positiva tal r_0 och λ som beror av a och η och det dessutom finns ett sådant affint plan $W \in A(a, m, \mathbb{R}^n)$ som beror av r att 3.4 och 3.5 gäller för alla $0 < r < r_0$.

Det följer direkt av definitionen att dessa villkor implicerar att $\Theta_*^m(E, a) > 0$ för $\mathcal{H}^m$ nästan alla $a \in E$.

Lemma 3.7. *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara en sådan mätbar (svagt) m-lineärt approximerbar mängd att $\mathcal{H}^m(E) < \infty$ och låt $F \subset E$ vara en mätbar mängd. Då är F (svagt) m-lineärt approximerbar.*

Bevis. Låt mängderna E och F vara som i lemmat ovan och låt $0 < \eta < 1$. Om $\mathcal{H}^m(F) = 0$ finns inget mer att bevisa. I annat fall fixera ett sådant $a \in F$ att $\Theta^{*m}(E \setminus F, a) = 0$ och för vilket det finns sådana $r_0 > 0$, $\lambda > 0$ och W att 3.4 gäller för a. Enligt antagandet i lemmat och Sats 1.14 (2) gäller detta för nästan alla $a \in F$. Låt $\epsilon = \lambda/2$. Låt det positiva talet $r_1 \leq r_0$ vara så att då $0 < 2r < r_1$ är $\mathcal{H}^m(E \setminus F \cap B(a, 2r)) < \epsilon r^m$. Detta implicerar att då $x \in W \cap B(a, r)$ och $0 < r < r_1/2$ så är

$$\mathcal{H}^m(E \setminus F \cap B(x, \eta r)) \leq \mathcal{H}^m(E \setminus F \cap B(a, 2r)) < \epsilon r^m \text{ för } x \in B(a, r),$$

vilket i sin tur implicerar att

$$\mathcal{H}^m(F \cap B(x, \eta r)) = \mathcal{H}^m(E \cap B(x, \eta r)) - \mathcal{H}^m(E \setminus F \cap B(x, \eta r)) > \frac{\lambda}{2} r^m.$$

Detta visar att 3.4 gäller. Det är trivialt att 3.5 gäller för delmängder. □

I följande lemma som är hämtat från Mattila [9] visar vi explicit att de behövliga mängderna är mätbara. I fortsättningen gör vi allmänhet inte det.

Sats 3.8. *Om E är en $\mathcal{H}^m$ mätbar m-rektifierbar delmängd av $\mathbb{R}^n$ och $\mathcal{H}^m(E) < \infty$ så är E m-lineärt approximerbar.*

Bevis. Låt E vara som ovan. Det finns en sådan Borelmängd B att $E \subset B$, $\mathcal{H}^m(B) < \infty$ och B är m-rektifierbar. Med stöd av Lemma 3.7 kan vi därmed anta att E är en Borel mängd. Vi kan också anta att $0 < \eta < 1$. Då E är m-rektifierbar finns det sådana Lipschitz funktioner $f_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ att

$$\mathcal{H}^m(E \setminus \bigcup_{i,j} f_i(B(0,j))) = 0.$$

Låt $B_{i,j} = f_i^{-1}(f_i(B(0,j)) \cap E)$. Då är $B_{i,j}$ Borelmängder, $\mathcal{H}^m(f_i(B_{i,j})) < \infty$ och $f_i(B_{i,j}) \subset E$ för alla i och j. Därmed räcker det att visa påståendet för $\mathcal{H}^m$ nästan alla punkter i en godtyckligt vald sådan mängd $f_i(B_{i,j})$.

Vi fixerar i och j och betecknar $B = B_{i,j}$ och $f = f_i$. Låt $\epsilon > 0$. Av Sats 2.6 och Sats 1.7 följer att det finns en sådan Borelmängd $D \subset B$ att $\mathcal{H}^m(B \setminus D) < \epsilon$ och sådana tal $r_0 > 0$ och $\lambda > 0$ att

$$\mathcal{H}^m(E \cap B(a,r)) \geq \lambda r^m \text{ för } a \in fD, \text{ då } 0 < r < r_0. \tag{1}$$

Det räcker att visa påståendet för mängden D.

Om f är deriverbar i punkten $x \in \mathbb{R}^m$ så definierar vi $L_x(y) = f'(x)y - f'(x)x + f(x)$ och $W_x = L_x\mathbb{R}^m$. Då $\dim W_x = m$ och $y \in \mathbb{R}^m$ så definierar vi

$$c(x,y) = \sup\{c\colon |L_x(y) - L_x(x)| \geq c|y - x|\}$$

och

$$l(x) = \inf\{c(x,y)\colon y \in \mathbb{R}^m\}.$$

Då existerar $l(x) > 0$ för $\mathcal{H}^m$ nästan alla $x \in D$, ty enligt Rademachers sats 2.3 existerar en sådan mängd $A_0 \subset D$ att $\mathcal{H}^m(A_0) = 0$ och f är deriverbar i mängden $D \setminus A_0$. Om $l(x) = 0$ kunde vi hitta ett sådant $y \in \mathbb{R}^m$ att $c(x,y) = 0$ eftersom S^{m-1} kompakt. Detta skulle i sin tur innebära att L_x inte är en bijektion, vilket implicerar att $\dim W_x < m$, men enligt Sats 2.5 kan detta bara gälla för en mängd $C_0 \subset D$ med $\mathcal{H}^m(C_0) = 0$. Genom att förändra D i en nollmängd kan vi således anta att $l(x) > 0$ existerar för alla $x \in D$. Enligt Sats 2.4 förändras fD då också bara i en nollmängd.

Låt $\delta_1 > 0$. Av ovanstående följer att $\mathcal{L}^m(D \setminus \cup_{N=1}^{\infty} A_N) = 0$ och $\mathcal{L}^m(D \setminus \cup_{N=1}^{\infty} A'_N) = 0$, där

$$A_N = \{x \in D\colon |f(y) - L_x(y)| \leq \delta_1^2|x - y| \text{ för } y \in B(x, \frac{1}{N})\},$$

$$A'_N = \{x \in D\colon l(x) > \frac{1}{N}\}$$

och av Lebesgues densitetssats följer att $\mathcal{L}^m(D \setminus \cup_{N=1}^{\infty} A_N^{''}) = 0$, där

$$A_N^{''} = \{x \in D\colon \text{ det finns sådana } r \text{ och } y \text{ att } 0 < r < \frac{1}{N}, y \in B(x, \frac{r}{\delta_1}) \text{ och } d(y, B) \leq \delta_1^2 r\}.$$

Med stöd av Luzins sats finns det en sådan kompakt mängd $D^{'} \subset D$ att $f^{'}$ är kontinuerlig i $D^{'}$ och $\mathcal{L}^m(D \setminus D^{'}) < \epsilon$. Då är A_N sluten och $A_N^{'}$ öppen i D' för alla $n \in \mathbb{N}$. Att mängden $A_N^{''}$ är mätbara följer omedelbart av att D är mätbar och mängden

$$U = \{x\colon \text{ det finns sådana } r \text{ och } y \text{ att } 0 < r < \frac{1}{N}, y \in B(x, \frac{r}{\delta_1}) \text{ och } d(y, B) \leq \delta_1^2 r\}$$

är öppen. Eftersom A_N, $A_N^{'}$ och $A_N^{''}$ är mätbara mängder, så finns det en kompakt mängd $C \subset D^{'}$ och sådana positiva tal r_0 och $\delta < \min\{\frac{\eta}{r}, \frac{1}{L}\}$ att $\mathcal{L}^m(D^{'} \setminus C) < \epsilon$ och om $x \in C$ så är

(2) $$|f(y) - L_x y| \leq \delta^2 |x - y| \text{ för } y \in B(x, r_0),$$

(3) $$l(x) > 2\delta \text{ och}$$

(4) $$d(y, B) \leq \delta^2 r \text{ för } y \in B(x, \frac{r}{\delta}), 0 < r < r_0.$$

Då mängden C är kompakt kan den delas in i ändligt många sådana Borel delmängder C_i att $d(C_i) < r_0$. Fixera i och låt $a \in C_i$, $a = f(x)$, vara sådan att $\Theta^m(E \setminus fC_i, a) = 0$. Av Sats 1.14 (2) följer att det räcker att bevisa att 3.4 och 3.5 gäller för sådana a. Låt $0 < r < \delta r_0/2$ och $b \in W_x \cap B(a, r)$, $b = L_x y$. Enligt (3) är $y \in B(x, r/\delta)$. Enligt (4) finns ett sådant $z \in B$ att $|y - z| < \delta^2 r$. Därmed är $|x - z| \leq r/\delta + \delta^2 r < 2r/\delta$. Med stöd av (2) och det faktum att $|f'(x)| \leq L \leq 1/\delta$ är

$$|f(z) - b| \leq |f(z) - L_x z| + |L_x z - L_x y| < \delta^2 |x - z| + L|z - y| < 3\delta r.$$

Eftersom $4\delta < \eta$, så följer av (1) att

$$\mathcal{H}^m(E \cap B(b, \eta r)) \geq \mathcal{H}^m(E \cap B(f(z), \delta r)) \geq \lambda \delta^m r^m,$$

vilket visar att 3.4 gäller.

Av (2) följer att

$$f(C_i \cap B(x, r/\delta)) \subset W_x(\delta r) \subset W_x(\eta r).$$

Av (3), (2) och det faktum $d(C_i) < r_0$ följer att

$$f(C_i \setminus B(x, r/\delta)) \subset \mathbb{R}^n \setminus B(a, r),$$

eftersom det för alla $y \in C_i \setminus B(x, r/\delta)$ gäller att

$$\begin{aligned} |a - f(y)| &\geq |L_x x - L_x y| - |L_x y - f(y)| \\ &\geq 2\delta|x-y| - \delta^2|x-y| \geq \delta|x-y| > r. \end{aligned}$$

Således är

$$B(a, r) \cap fC_i \subset W_x(\eta r).$$

Emedan $\Theta^m(E \setminus fC_i, a) = 0$ finns det ett sådant positivt tal $r_1 < r_0$ att 3.5 gäller då $r < r_1$. □

3.3 Karakteriseringssatser

3.3.1 Approximativa tangentplan

Satserna, lemmana och definitionerna i detta kapitel är hämtade ur Mattila [9].

Om $a \in \mathbb{R}^n$, $V \in Gr(n-m, \mathbb{R}^n)$, $0 < s < 1$ och $0 < r < \infty$ så betecknar vi

$$X(a, V, s) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \pi_{V^\perp}(x-a) < s|x-a|\}$$

och

$$X(a, r, V, s) = X(a, V, s) \cap B(a, r).$$

Definition 3.9. Låt $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ och $V \in Gr(m, \mathbb{R}^n)$. Då är V ett approximativt m-tangentplan för mängden A i punkten a om $\Theta^{*m}(A, a) > 0$ och

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{H}^m(A \cap B(a,r) \setminus X(a, V, s))}{r^m} = 0 \text{ då } 0 < s < 1.$$

Mängden av alla tangentplan för mängden A i punkten a betecknar vi $ap\, Tan^m(A, a)$.

Lemma 3.10. *Låt A och B vara sådana $\mathcal{H}^m$ mätbara mängder att $B \subset A$ och $\mathcal{H}^m(A) < \infty$. Då gäller för $\mathcal{H}^m$ nästan alla $a \in \mathbb{R}^n$ att $ap\, Tan^m(B, a) = ap\, Tan^m(A, a)$.*

Bevis. Lemmat följer av Sats 1.14 och dess korollarium 1.15. □

Sats 3.11. *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara en mätbar delmängd och $\mathcal{H}^m(E) < \infty$. Då är följande utsagor ekvivalenta:*

(1) *E är m-rektifierbar.*

(2) *E är m-lineärt approximerbart.*

(3) *För $\mathcal{H}^m$ nästan alla $a \in E$ finns det ett unikt approximativt m-tangentplan för mängden E i punkten a.*

(4) *För $\mathcal{H}^m$ nästan alla $a \in E$ finns det något approximativt m-tangentplan för mängden E i punkten a.*

Vi bevisar tre lemman innan vi bevisar satsen.

Lemma 3.12. *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$, $V \in Gr(n-m, \mathbb{R}^n)$, $0 < s < 1$ och $0 < r < \infty$. Om*

$$E \cap X(a, r, V, s) = \emptyset \text{ då } a \in E$$

är E m-rektifierbar.

Bevis. Låt E, V, s och r vara som ovan. Eftersom det finns en sådan uppräknelig mängd $\{x_j\}$ av punkter i $\mathbb{R}^n$ att $E = E \cap \cup_{j=1}^{\infty} B(x_j, r/2)$ kan vi anta att $d(E) < r$. Låt $a \in E$. Om $|\pi_{V^\perp} a - \pi_{V^\perp} b| < s|a-b|$ och $|a-b| < r$, så är $b \in X(a, r, V, s)$ och av antagandet följer då att $b \notin E$. Följaktligen innebär det att om $a, b \in E$ så är $|\pi_{V^\perp} a - \pi_{V^\perp} b| \geq s|a-b|$. Därmed är $\pi_{V^\perp}|_E$ bijektiv och har en invers funktion $f = (\pi_{V^\perp}|_E)^{-1}$ som är Lipschitz, $L_f \leq 1/s$. Eftersom bildmängden för funktionen $\pi_{V^\perp}|_E$ hör till det m-dimensionella planet $V^\perp$ och $E = f(\pi_{V^\perp} E)$ så finns det en Lipschitz funktion $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ vars bild täcker E. Följaktligen är E m-rektifierbar. $\square$

Lemma 3.13. *Låt $V \in Gr(n-m, \mathbb{R}^n)$, $0 < s < 1$, $0 < r_0 < \infty$ och $0 < c < \infty$. Om $F \subset \mathbb{R}^n$ är helt m-orektifierbar och*

$$\mathcal{H}^m(F \cap X(a, r, V, s)) \leq cr^m s^m \text{ då } x \in F \text{ och } 0 < r < r_0$$

så är

$$\mathcal{H}^m(F \cap B(a, \frac{r_0}{6})) \leq 2 \cdot 6^m c r_0^m \text{ då } a \in \mathbb{R}^n.$$

Bevis. Låt V, s, r_0, c och F vara som ovan. Det räcker att bevisa satsen då $F \subset B(a, \frac{r_0}{6})$. Vi kan enligt Lemma 3.12 anta att

$$F \cap X(x, V, \frac{s}{4}) \neq \emptyset \text{ då } x \in F.$$

Låt

$$t(x) = \sup\{|y - x| \colon y \in F \cap X(x, V, \frac{s}{4})\} \text{ då } x \in F.$$

Då är $0 < t(x) \leq r_0/3$. Vi väljer ett sådant $y \in F \cap X(x, V, \frac{s}{4})$ att $|y - x| \geq \frac{3}{4}t(x)$. Vi betecknar

$$C_x = \pi_{V^\perp}^{-1}(\pi_{V^\perp} B(x, \frac{st(x)}{4})).$$

Då följer med förhållandevis enkel slutledning att

$$F \cap C_x \subset X(x, 2t(x), V, s) \cup X(y, 2t(x), V, s) \text{ då } x \in F.$$

(Se Mattila [9] för ett detaljerat bevis och en geometrisk skiss av situationen.)

Av antagandet i lemmat följer därmed att

$$\mathcal{H}^m(F \cap C_x) \leq 2c(2t(x))^m s^m.$$

Eftersom mängden F är begränsad finns det enligt Vitalis täckessats 1.24 en sådan följd av disjunkta kulor $(\pi_{V^\perp} B(x_i, st(x_i)/13))$, $x_i \in F$ för alla $i \in \mathbb{N}$, att

$$\pi_{V^\perp} F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \pi_{V^\perp} B(x_i, \frac{st(x_i)}{4}).$$

Av detta följer omedelbart att $F \subset \cup C_{x_i}$.

Mängden $V^\perp \cap B(y, r)$ är isomorf med $B(0, r) \subset \mathbb{R}^m$ då $y \in V^\perp$. Således är $\mathcal{H}^m(V^\perp \cap B(y, r)) = (2r)^m$ då $y \in V^\perp$. Detta implicerar att

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^m(F) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^m(F \cap C_{x_i}) \leq 2c2^m \sum_{i=1}^{\infty} (st(x_i))^m \\
&= 2^{m+1} c 13^m 2^{-m} \sum_{i=1}^{\infty} (V^\perp \cap B(\pi_{V^\perp} x_i, st(x_i)/13)) \\
&\leq 2 \cdot 13^m c \mathcal{H}^m(V^\perp \cap B(\pi_{V^\perp} a, \frac{r_0}{5})) \leq 2 \cdot 6^m c r_0^m
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.14. *Låt $V \in Gr(n - m, \mathbb{R}^n)$, $0 < s < 1$ och låt $F \subset \mathbb{R}^n$ vara en sådan helt m-orektifierbar mängd att $\mathcal{H}^m(A) < \infty$. Då är*

(1) $$\Theta^{*m}(A \cap X(a, V, s), a) \geq \frac{1}{2} \cdot 80^{-m} s^m$$

för $\mathcal{H}^m$ nästan alla $a \in A$.

Bevis. Låt C vara mängden av punkter av $a \in F$ för vilka (1) inte gäller. Då är $F = \cup_{i=1}^{\infty} F_i$, där

$$F_i = \{a \in F \colon \mathcal{H}^m(F \cap X(a, r, V, s)) < cs^m r^m \text{ för } 0 < r < \frac{1}{i}\}$$

och $c = \frac{1}{2} \cdot 39^{-m}$. Fixera i. Om $0 < \delta < \frac{1}{i}$, så är

$$\mathcal{H}^m(F_i \cap B(a, \frac{\delta}{6})) \leq 2 \cdot 6^m c \delta^m \text{ då } a \in \mathbb{R}^n,$$

enligt Lemma 3.13. Följaktligen är $\Theta^{*m}(F_i, a) \leq 2 \cdot 18^m c < 2^{-m}$. Därmed följer av Sats 1.14 (1) att $\mathcal{H}^m(F_i) = 0$, vilket bevisar påståendet. □

Vi bevisar nu Sats 3.11.

Bevis. Att (1) implicerar (2) är Sats 3.8.

Anta att (2) gäller. Vi kan vidare anta att $E \neq \emptyset$. Låt $\epsilon > 0$ och $0 < s < 1$. Låt $a \in E$ vara så att $\Theta^{*m}(E, a) \leq 1$ och låt r_0 och λ vara sådana positiva tal att villkoren 3.4 och 3.5 gäller för a då vi i definitionen ifråga väljer $\eta = \epsilon s$. Låt W vara planet som uppfyller de ifrågavarande villkoren. Det är klart att

$$B(a, r) \setminus X(a, W - a, s) \subset (B(a, r) \setminus W(\epsilon s r)) \cup B(a, 2\epsilon r).$$

Följaktligen kunde vi valt r_0 så litet att

$$\sup_{0<r<r_0} \frac{\mathcal{H}^m(E \cap B(a, r) \setminus X(a, W - a, s))}{r^m} \leq (\epsilon s + 2^m \epsilon^m).$$

Således är $W - a$ ett tangentplan för E i punkten a eftersom ϵ och s var godtyckliga och $W - a$ inte beror av dem. Anta att $V \in Gr(m, \mathbb{R}^n)$ och $V \neq W - a$. Välj ϵ och s så små att $\eta < \min\{1, d(V, W - a)/2\}$. Av 3.4 följer att det finns sådana positiva tal s_1, λ_1 och r_1 och en sådan följd (x_N) i W som konvergerar mot a och vars alla element är olika a att $X(a, V, s_1) \cap B(x_N, \eta|x_N - a|) = \emptyset$ och $\mathcal{H}^m(E \cap B(x_N, \eta|x_N - a|)) \geq \lambda_1 |x_N - a|^m$ då $0 < |x_N - a| < r_1$. Därmed är

$$\lim_{x_N \to a} \frac{\mathcal{H}^m(E \cap B(a, 2|x_N - a|) \setminus X(a, V, s_1))}{|x_N - a|^m} \geq \lambda_1 > 0.$$

Följaktligen är V inte ett m-tangentplan och $W - a$ är därmed unikt.

Det är klart att (3) implicerar (4).

Vi visar att (4) implicerar (1). Enligt Sats 3.2 och Lemma 3.10 är det samma sak som att visa att om mängden F är helt m-orektifierbar så saknar mängden F tangentplan i $\mathcal{H}^m$ nästan alla punkter i $\mathbb{R}^n$. Vi konstaterar inledningsvis att mängden $Gr(m,\mathbb{R}^n)$ är kompakt, ty funktionen $f(V)=\pi_V$, där $V\in Gr(m,\mathbb{R}^n)$, definierar en isometri $f: Gr(m,\mathbb{R}^n)\to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ och mängden $\{\pi_V\colon V\in Gr(m,\mathbb{R}^n)\}\subset L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ är sluten och begränsad och därmed kompakt. Följaktligen kan $Gr(m,\mathbb{R}^n)$ täckas med ändligt många kulor $B(V,\frac{1}{3})\subset Gr(m,\mathbb{R}^n)$. Fixera V. Vi skriver

$$C=\{a\in\mathbb{R}^n\colon\ ap\,Tan^m(E,a)\cap B(V,\frac{1}{3})\neq\emptyset\}.$$

Det räcker att visa att $\mathcal{H}^m(C)=0$. Vi gör motantagandet att $\mathcal{H}^m(C)>0$. Låt $c>0$. Då finns det ett sådant $\delta_0>0$ att mängden D bestående av element $a\in C$ för vilka gäller att

$$\sup_{0<r<\delta_0}\frac{\mathcal{H}^m(C\cap B(a,r)\setminus X(a,W,\frac{1}{3}))}{r^m}<c \text{ för något } W\in ap\,Tan^m(E,a)\ \cap B(V,\frac{1}{3})$$

har positivt $\mathcal{H}^m$ mått. Vi visar att

$$X(a,r,V^\perp,\frac{1}{3})\subset\cap_{W\in B(V,\frac{1}{3})}B(a,r)\setminus X(a,W,\frac{1}{3}).$$

Fixera $W\in B(V,\frac{1}{3})$. Låt $x\in X(a,r,V^\perp,\frac{1}{3})$, då är $|\pi_V(x-a)|<|x-a|/3$. Eftersom $\|\pi_W-\pi_V\|\le 1/3$ så är $|\pi_W(x-a)|<2|x-a|/3$. Därmed är $|\pi_W^\perp(x-a)|>|x-a|/3$, vilket visar att $x\notin X(a,W,1/3)$. Om $a\in D$ så är

$$\mathcal{H}^m(D\cap X(a,r,V^\perp,\frac{1}{3}))<cr^m \text{ då } 0<r<\delta_0.$$

Om $c<\frac{1}{2}\cdot 80^{-m}$ får vi enligt Lemma 3.14 en motsägelse. □

Följande korollarium följer omedelbart av Sats 3.11, Sats 3.2 och Sats 1.14 (2).

Korollarium 3.15. *Låt $E\subset\mathbb{R}^n$ vara en sådan mätbar mängd att $\mathcal{H}^m(E)<\infty$. Då är E helt m-orektifierbar om och endast om $ap\,Tan^m(E,a)=\emptyset$ för $\mathcal{H}^m$ nästan alla $a\in E$.*

Sats 3.11 kan inte förbättras så att det alltid skulle gälla att en mätbar m-rektifierbar mängd $E\subset\mathbb{R}^n$ med $\mathcal{H}^m(E)<\infty$ har ett unikt approximativt tangentplan i alla punkter $a\in E$.

Exempel 3.16. Låt $E_{i,j}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\colon x_1=(\frac{1}{i}+j) \text{ och } x_2^2+x_3^2\le(x_1-j)^4\}$. Mängden

$$E=\bigcup_{j=0}^{\infty}\bigcup_{i=10^j}^{\infty}E_{i,j}$$

uppfyller de ovannämnda egenskaperna ($n=3, m=2$) och i punkterna $(n,0,0)$, där $n\in\mathbb{N}\cup 0$, är alla plan som innehåller x-axeln ett approximativt tangentplan för mängden E.

3.3.2 Densitet

Syftet med detta kapitel är att bevisa följande karakteriseringssats. Lejonparten av bevisen är från Marstrand [7] och Mattila [8] och [9].

Sats 3.17. Karakterisering med densitet. *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara en m-mängd. Då gäller följande:*

(1) *Mängden E är m-rektifierbar om och endast om E är en regelbunden m-mängd.*

(2) *Mängden E är helt m-orektifierbar om och endast om E är en oregelbunden m-mängd.*

De två utsagorna är ekvivalenta enligt Sats 3.2. Sats 3.17 kommer att bevisas med stöd av en rad hjälpsatser.

Se Sats 1.7.3 i Federer [4] för bevis för nästa lemma.

Lemma 3.18. *Låt V vara ett n-dimensionellt vektorrum och låt $S\colon V \times V \to \mathbb{R}$ vara en bilineär symmetrisk funktion. Då existerar det en sådan ortonormal bas $\{e_1, \ldots, e_n\}$ för V att*

$$S(e_i, e_i) \geq S(e_j, e_j) \text{ och } S(e_i, e_j) = 0 \text{ då } i < j.$$

Lemma 3.19. *Låt F vara en $\mathcal{H}^m$ mätbar delmängd av $\mathbb{R}^n$ med $\mathcal{H}^m(F) < \infty$. Om F är helt m-orektifierbar och svagt m-lineärt approximerbar så är $\mathcal{H}^m(\pi_V F) = 0$ för alla $V \in Gr(m, \mathbb{R}^n)$.*

Bevis. Låt $0 < \epsilon < 1/2$ och $V \in Gr(m, \mathbb{R}^n)$. Av det faktum att den nedre densiteten är positiv $\mathcal{H}^m$ nästan överallt och Sats 1.7 följer att det existerar en kompakt mängd $K \subset F$ och sådana positiva tal r_0 och δ så att $\delta\epsilon < \epsilon$, $\mathcal{H}^m(F \setminus K) < \epsilon$ för vilka följande gäller. Om $a \in K$ och $0 < r < r_0$, så är

$$\mathcal{H}^m(F \cap B(a, r)) > \delta r^m. \tag{1}$$

Låt $0 < \eta < \delta\epsilon$, $r' = 2r$ och $\eta' = \delta(\eta/4)^m$. Enligt definitionen för svag m-lineär approximerbarhet och behövliga mängders mätbarhet (vilket följer av beviset för Sats 3.8) kan vi välja sådana K, r_0 och δ att då $a \in K$ och $0 < r' < r_0$ så gäller ovanstående och det gäller dessutom att

$$\mathcal{H}^m(F \cap B(a, r') \setminus W(\eta' r')) < \eta'(r')^m,$$

där W är ett m-dimensionellt plan som beror av r och som är som i Definition 3.6. Detta implicerar i sin tur att

$$\mathcal{H}^m(F \cap B(a, 2r) \setminus W(\eta r/2)) < \delta(\eta r/2)^m.$$

Om $b \in B(a, r) \setminus W(\eta r)$ så är $B(b, \eta r/2) \subset B(a, 2r) \setminus W(\eta r/2)$, ty $\eta < 1/2$. Av detta och (1) erhåller vi att

$$K \cap B(a, r) \setminus W(\eta r) = \emptyset \text{ då } a \in K \text{ och } 0 < r < r_0. \tag{2}$$

Trivialt gäller också att

(3) $$\mathcal{H}^m(\pi_V(F \setminus K)) < \epsilon.$$

Eftersom K är helt m-orektifierbar, så följer av Lemma 3.12 att

$$\mathcal{H}^m(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{a \in K\colon K \cap X(a, 1/i, V^\perp, \eta) = \emptyset\}) = 0.$$

Således finns det för $\mathcal{H}^m$ nästan alla $a \in K$ punkter $b \in K$ som är godtyckligt nära a och som satisfierar

(4) $$|\pi_V(b-a)| < \eta|b-a|.$$

Anta att (4) gäller för $a, b \in K$ och $r = |a-b| < r_0$. Låt $W \in A(a, m, \mathbb{R}^n)$ vara som i (2) och låt $c = \pi_W b$. Av (2) följer att

$$|c-b| \leq \eta r \text{ och } \frac{r}{2} \leq |c-a| \leq r$$

och därmed också att

$$|\pi_V(c-a)| < 2\eta r.$$

Vi skriver $V = W - a$ och definierar funktionen $S : V \times V \to \mathbb{R}$ så att $S(v_a, v_b) = \pi_V(v_a) \cdot \pi_V(v_b)$, där $v_a, v_b \in V$. Då följer av Lemma 3.18 att vi kan välja en sådan ortonormal bas $\{e_1, \ldots, e_m\}$ för $W - a$ att $\pi_V(e_i) \cdot \pi_V(e_j) = 0$. Nu gäller för något i att

$$|\pi_V e_i| \leq 2r^{-1}|\pi_V(c-a)| < 4\eta,$$

eftersom det i annat fall skulle gälla att

$$\begin{aligned}|\pi_V(c-a)|^2 &= \sum_{j=1}^{m} |(c-a)\cdot e_j|^2|\pi_V e_j|^2 \\ &> 4r^{-2}|\pi_V(c-a)|^2|c-a|^2 \\ &\geq |\pi_V(c-a)|^2.\end{aligned}$$

Följaktligen är $\pi_V(W \cap B(a,r))$ innesluten i en m-dimensionell rektangel vars ena sida har längden $8\eta r$ och resten av sidorna har längden $2r$. Av (2) följer då att $\pi_V(K \cap B(a,r))$ är innesluten i en rektangel vars ena sida har längden $10\eta r$ och de övriga sidorna har längden $2r + 2\eta r$. Den rektangeln kan vi täcka med $(\lceil (2r+2\eta r)/10\eta r \rceil)^{(m-1)}$ stycken m-dimensionella kuber med sidlängden $10\eta r$. Därmed är

(5) $$\mathcal{H}^m_{10n^{\frac{1}{2}}\eta r_0}\pi_V(K \cap B(a,r)) \leq (\left\lceil \frac{2r+2\eta r}{10\eta r} \right\rceil)^{(m-1)}(10n^{\frac{1}{2}}\eta r)^m \leq c\eta r^m,$$

där $c = c(n,m)$ kan väljas som en konstant som endast beror av n och m. Av Vitalis täckessats för Radonmått och det faktum att $\mathcal{H}^m \llcorner K$ är ett Radonmått följer att vi kan hitta disjunkta kulor $B(a_i, r_i)$, där $a_i \in K$, som satisfierar (5) och sådana att

$$\mathcal{H}^m(K \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B(a_i, r_i)) = 0.$$

Av (5) och (1) följer att

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^m_{10n^{\frac{1}{2}}\eta r_0}(\pi_V(K)) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^m_{10n^{\frac{1}{2}}\eta r_0}(\pi_V(K \cap B(a_i, r_i))) \\
&\leq c\eta \sum_{i=1}^{\infty} r_i^m \leq c\eta\delta^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^m(F \cap B(a_i, r_i)) \\
&\leq c\epsilon \mathcal{H}^m(F).
\end{aligned}$$

Av ovanstående och (3) följer att

$$\mathcal{H}^m_{10n^{\frac{1}{2}}\eta r_0}(\pi_V(F)) < (1 + c\mathcal{H}^m(F))\epsilon.$$

Lemmat följer eftersom ϵ och r_0 kan vara godtyckligt små positiva tal och c inte beror av dem. $\square$

Sats 3.20. *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara en sådan $\mathcal{H}^m$ mätbar mängd att $0 < \mathcal{H}^m(E) < \infty$. Då är E m-rektifierbar om och endast om E är svagt m-lineärt approximerbar. Då gäller dessutom att*

(i) $\Theta^m(E, x) = 1$ *för $\mathcal{H}^m$ nästan alla $x \in E$, och*

(ii) $\mathcal{H}^m(\pi_V E) > 0$ *för $\gamma_{n,m}$ nästan alla $V \in Gr(m, \mathbb{R}^n)$.*

Om man dessutom antar att E är en delmängd av ett m-dimensionellt plan så följer (i) av Lebesgues densitetssats och (ii) gäller trivialt. I kapitel 3.2 visade vi att en m-rektifierbar mängd med ändligt $\mathcal{H}^m$ nästan överallt approximeras väl av något m-dimensionellt plan. Det är därför naturligt att fråga sig om Sats 3.20 gäller.

Satsen kommer att bevisas som i Mattila [9], med några influenser av beviset i de Lellis [1] som är en omarbetad version av Mattilas bevis.

Bevis. Om E är m-rektifierbar så är E m-lineärt approximerbar enligt Sats 3.8 och därmed också svagt m-lineärt approximerbar.

Låt $\epsilon > 0$. Vi antar att E är svagt m-lineärt approximerbar. På motsvarande sätt som i beviset för Lemma 3.19 kan vi hitta en sådan kompakt mängd $K \subset E$ att $\mathcal{H}^m(E \setminus K) < \epsilon$ och sådana positiva tal δ och r_0 att

(1) $$\mathcal{H}^m(E \cap B(a, r)) > \delta r^m \text{ för } a \in K, \text{ då } 0 < r < r_0.$$

Låt $0 < \eta < 1$, $0 < u < 1$ och $0 < \gamma \leq 1$ vara sådana att $\eta < \gamma(1-u)/8$. På liknande sätt som i Lemma 3.19 kan vi hitta en kompakt mängd $K_1 \subset K$, positiva tal $r_1 \leq r_0$ och λ_0 och sådana $W \in A(a, m, \mathbb{R}^n)$ som beror av r att $\mathcal{H}^m(K \setminus K_1) < \epsilon$ och för alla $a \in K_1$ gäller då $0 < r < r_1$ att:

(2) $$K_1 \cap B(a,r) \setminus W(\eta r) = \emptyset,$$

(3) $$\mathcal{H}^m(E \cap B(b, \eta r)) > \lambda_0 r^m \text{ då } b \in W \cap B(a,r),$$

(4) $$\mathcal{H}^m((E \setminus K) \cap B(a, 2r)) < \lambda_0 r^m.$$

Att vi kunde välja mängden K_1 och talen r_1 och δ_0 så att också (3) och (4) gäller beror på att då η är givet beror $\lambda = \lambda(a)$ i Definition 3.6 bara på a och det faktum att $\Theta^m(E \setminus K, x) = 0$ för $\mathcal{H}^m$ nästan alla $x \in K$.

Härnäst visar vi att det för alla $a \in K_1$ och alla $0 < r < r_1$ gäller att

(5) $$W \cap B(a,r) \subset K(\eta r),$$

där W är som ovan. Låt $0 < r < r_1$. Vi gör motantagandet att det finns ett sådant $b \in W \cap B(a,r)$ att $B(b, \eta r) \cap K = \emptyset$ för något $a \in K$. Då är

$$\mathcal{H}^m(E \cap B(b, \eta r)) = \mathcal{H}^m((E \setminus K) \cap B(b, \eta r)) \leq \mathcal{H}^m((E \setminus K) \cap B(a, 2r)) < \lambda_0 r^m,$$

men det är en motsägelse mot (3), vilket visar att (5) gäller.

Eftersom det för $\mathcal{H}^m$ nästan alla $a \in K_1$ gäller att $\Theta^{*m}(E, a) \leq 1$ och $\Theta^m(E \setminus K_1, a) = 0$ så existerar för $\mathcal{H}^m$ nästan alla $a \in K_1$ ett positivt tal $r_2 \leq r_1$ beroende av a och ett sådant affint delrum $W \in A(a, m, \mathbb{R}^n)$ att då $0 < r < r_2$ så gäller (2),

(6) $$W \cap B(a,r) \subset K_1(\eta r),$$

(7) $$\mathcal{H}^m(E \cap B(a,r)) < (3r)^m \text{ och}$$

(8) $$\mathcal{H}^m(E \setminus K_1) \cap B(a,r)) \leq 400^{-m} t \delta r^m,$$

där $t = 2^m \gamma^m (u^m - u^{2m})$. Att r_2 och W kunde väljas så att också (6) gäller kan visas på motsvarande sätt som (5) visades.

Vi kan anta att $K_1 \neq \emptyset$ och fixerar sådana a, r och W och väljer $V \in Gr(m, \mathbb{R}^n)$ så att funktionen $\pi_V|_W \colon W \to V$ är sådan att

(9) $$|\pi_V x - \pi_V y| \geq \gamma |x - y| \text{ för } x, y \in W.$$

Vi kommer att visa att om talet η är tillräckligt litet för ett givet δ, u och γ, så är

(10) $$\mathcal{H}^m(\pi_V(E \cap B(a,r))) \geq (2\gamma u^2 r)^m.$$

Detta kommer att bevisa utsagorna i satsen. Av Lemma 3.19 följer nämligen då att E är m-rektifierbar, ty i annat fall kunde vi byta ut E mot en delmängd av E med positivt mått som är helt m-orektifierbar, vilket skulle ge en motsägelse. Vi kan välja V så att $V + a = W$, där W kan bero av r, då kan $\gamma = 1$ och således är

$$\mathcal{H}^m(E \cap B(a, r)) \geq (2u^2 r)^m \text{ då } 0 < r < r_2,$$

vilket implicerar (i) eftersom $\Theta^{*m}(E, a) \leq 1$ för $\mathcal{H}^m$ nästan alla $a \in E$. Utsaga (ii) följer också, ty om $\pi_V|_W$ är bijektiv så finns det ett $\gamma > 0$ så att (9) gäller. Enligt Korollarium 1.19 är $\pi_V|_W$ är bijektiv för $\gamma_{n,m}$ nästan alla $V \in Gr(m, \mathbb{R}^n)$.

Anta att (10) inte gäller. Låt

$$C = \pi_V(K_1 \cap B(a, r)) \text{ och } D = \pi_V(W \cap B(a, ur)) \setminus C.$$

Då är $\mathcal{H}^m(C) < (2\gamma u^2 r)^m$. Av (9) följer att $V \cap B(\pi_V a, \gamma ur) \subset \pi_V(W \cap B(a, ur))$ och eftersom $\mathcal{H}^m(V \cap B(a, r)) = (2r)^m$, då $B(a, r) \subset \mathbb{R}^n$ och $a \in V$, så är

$$\mathcal{H}^m(D) \geq tr^m > 0 \tag{11}$$

Eftersom C är kompakt så är $d(x, C) > 0$ för alla $x \in D$. Därmed kan D täckas med sådana kulor $B(b, \rho(b))$ att $b \in D$, $C \cap U(b, \rho(b)) = \emptyset$ och $C \cap \partial B(b, \rho(b)) \neq \emptyset$, där $\rho(b) > 0$ och $U(b, \rho(b))$ är mängden av innerpunkter i $B(b, \rho(b))$. Enligt Vitalis täckessats 1.24 finns det ett uppräkneligt antal sådana kulor $B(b_i, \rho_i)$ att

$$B(b_i, 4\rho_i) \cap B(b_j, 4\rho_j) = \emptyset \text{ då } i \neq j \tag{12}$$

och kulorna $B(b_i, 16\rho_i)$ täcker D. Följaktligen kan vi med stöd av (11) välja en sådan ändlig familj av dessa kulor $B(b_i, 16\rho_i)$, $i = 1, \ldots, p$ att

$$\sum_{i=1}^{p} \rho_i^m \geq 50^{-m} tr^m. \tag{13}$$

Vidare gäller att

$$\rho_i \leq \eta r \text{ för } i = 1, \ldots, p, \tag{14}$$

ty av (6) och vårt val av a följer att om $y \in W \cap B(a, ur)$ så existerar ett sådant $x \in K_1$ att $|y - x| \leq \eta r$. Eftersom $\eta < 1 - u$ så är $x \in K_1 \cap B(a, r)$. Olikheten (14) följer av att $L_{\pi_V} \leq 1$.

Vi betraktar mängderna

$$S_i = \pi_V^{-1}(B(b_i, \rho_i/2)) \cap W(\gamma(1 - u)r/4)$$

och omordnar dem så att om $i = 1, \dots, q$ så innehåller de inte några punkter som finns i K och om $i = q+1, \dots, p$ så innehåller de åtminstone en punkt $c_i \in K$. Låt $b_i' \in W$ vara en sådan punkt att $\pi_V b_i' = b_i$. Då är $b_i' \in B(a, ur)$ och av (9) och (14) följer då $i = q+1, \dots p$ att

$$\begin{aligned}
|a - c_i| &\le |a - b_i| + |b_i - \pi_W c_i| + |\pi_W c_i - c_i| \\
&\le ur + \frac{|b_i - \pi_V(\pi_W c_i)|}{\gamma} + \frac{(1-u)r}{4} \\
&\le ur + \frac{|b_i - \pi_V c_i|}{\gamma} + \frac{|\pi_V(c_i - \pi_W c_i)|}{\gamma} + \frac{(1-u)r}{4} \\
&\le ur + \frac{\rho_i}{2\gamma} + \frac{(1-u)r}{2} \\
&\le \frac{\eta r}{\gamma} + \frac{(1+u)r}{2}.
\end{aligned}$$

Eftersom $\eta < \gamma(1-u)/3$, så är därmed trivialt

$$B(c_i, \rho_i/4) \subset B(a, r).$$

Dessutom är

$$\pi_V(B(c_i, \rho_i/4)) \subset V \cap U(b_i, \rho_i) \subset V \setminus C. \tag{15}$$

Följaktligen är

$$\bigcup_{i=q+1}^{p} E \cap B(c_i, \rho_i/4) \subset (E \setminus K_1) \cap B(a, r), \tag{16}$$

ty om $E \cap B(c_i, \rho/4) \cap K_1 \cap B(a, r) \neq \emptyset$ så innebär det att $\pi_V(E \cap B(c_i, \rho/4)) \cap C \neq \emptyset$ men det är en motsägelse mot (15). Eftersom kulorna $B(c_i, \rho/4)$ är disjunkta enligt (15) och (12) så är

$$\delta 4^{-m} \sum_{i=q+1}^{p} \rho_i^m < \sum_{i=q+1}^{p} \mathcal{H}^m(E \cap B(c_i, \rho_i/4)) = \mathcal{H}^m(\bigcup_{i=q+1}^{p} E \cap B(c_i, \rho_i/4)) < 400^{-m} t \delta r^m$$

enligt (1), (16) och (8), vilket tillsammans med (13) implicerar att

$$\sum_{i=1}^{q} \rho_i^m > 100^{-m} t r^m. \tag{17}$$

I fortsättningen är $i = 1, \ldots, q$. Vi definierade kulorna $B(b_i, \rho_i)$ så att

$$\pi_V^{-1}(\partial B(b_i, \rho_i)) \cap K_1 \cap B(a, r) \neq \emptyset.$$

Följaktligen finns det enligt (2) punkter

$$e_i \in \pi_V^{-1}(\partial B(b_i, \rho_i)) \cap W(\eta r) \cap K_1 \text{ för } i = 1, \ldots, q. \tag{18}$$

Eftersom $\eta^{-1}\rho \leq r < r_1$ gäller enligt (14) så kan man utgående från (5) hitta sådana $W_i \in A(e_i, m, \mathbb{R}^n)$ att

$$A_i = B(e_i, \eta^{-1}\gamma(1-u)\rho_i/16) \cap W_i \subset K((1-u)\rho_i/16). \tag{19}$$

Då är $b_i \notin \pi_V A_i$, ty om det existerar ett sådant $x \in A_i$ att $\pi_V x = b_i$ så kan vi med stöd av (19) hitta en sådan punkt $y \in K$ att $|x - y| \leq (1-u)\rho_i/16$. Då är $\pi_V y \in B(b_i, \rho_i/2)$. Enligt (18) är $d(e_i, W) \leq \eta r$. Av (14), (19) och $\eta < \gamma(1-u)/8$ följer därmed att

$$\begin{aligned} d(y, W) &\leq |y - x| + |x - e_i| + d(e_i, W) \\ &< \frac{(1-u)\rho_i}{16} + \frac{\gamma(1-u)}{16\eta} + \eta r \\ &< \frac{\gamma(1-u)}{r}, \end{aligned}$$

vilket skulle innebära att $y \in S_i \cap K$. Detta är en motsägelse i och med att $S_i \cap K = \emptyset$.

Låt I_i vara ett slutet linjesegment med ändpunkter b_i och $\pi_V e_i$. Då är $I_i \cap \partial_V \pi_V(A_i) \neq \emptyset$, eftersom $b_i \in I_i \setminus \pi_V(A_i)$ och $\pi_V e_i \in I_i \cap \pi_V A_i$. Med ∂_V avses randen i den relativa topologi som induceras i V av $\mathbb{R}^n$. Eftersom $\partial_V \pi_V(A_i) = \pi_V(\partial_{W_i} A_i)$, så finns det ett sådant $a_i \in \partial_{W_i} A_i$ att $\pi_V a_i \in I_i$. Låt J_i vara det slutna segmentet mellan e_i och a_i. Då gäller trivialt att $J_i \subset A_i$ och $\pi_V J_i \subset I_i$. Därmed implicerar (18) att

$$|\pi_V x - b_i| \leq \rho_i \text{ för } x \in J_i. \tag{20}$$

Längden av J_i, $|J_i|$, är $\eta^{-1}\gamma(1-u)\rho_i/16$. (Observera att detta tillsammans med det faktum att längden av I_i är ρ_i implicerar att planen V och W_i är nästan vinkelräta då η är litet. Vi visar detta. Låt $\{v_1, \ldots v_m\}$ vara en ortogonal bas för V, där v_i är parallell med I_i. Vi kan också bilda sådana ortonormala baser $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}\}$ för W_i att e_{i_1} är parallell med J_i. Då gäller för alla i att e_{i_1} är nästan vinkelrät mot v_i. Att planen är nästan vinkelräta följde också av att $b_i \notin \pi_V A_i$.) Av (19) följer att

$$J_i \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \rho_i).$$

Eftersom

$$\frac{|J_i|}{d(B(x,\rho_i))} = \frac{\gamma(1-u)}{32\eta}$$

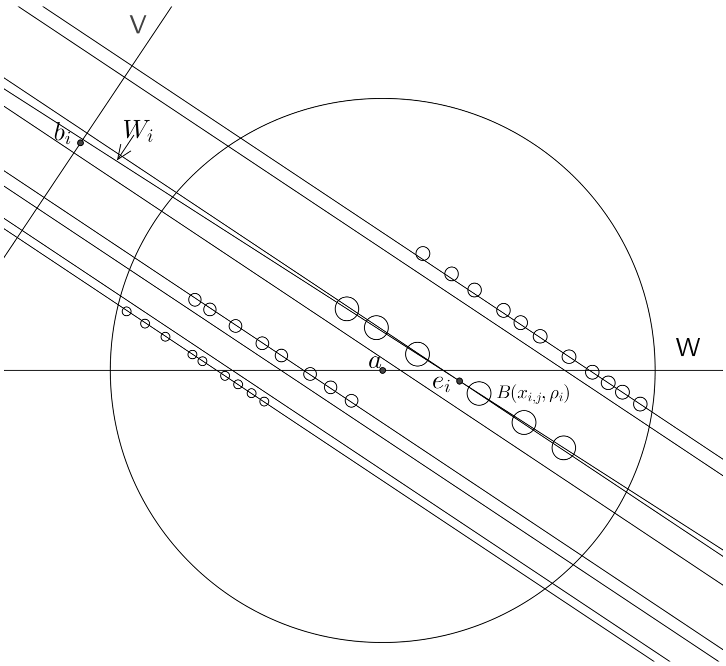
så existerar en sådan konstant c, som är oberoende av såväl $\gamma, u, \delta, t, r, \eta$ som m, att vi kan välja en ändlig mängd sådana kulor som vi betecknar $B(x_{i,j}, \rho_i)$, $j = 1, \ldots, k$ att:

(21) $$J_i \cap B(x_{i,j}, \rho_i) \neq \emptyset,$$

(22) $$B(x_{i,j}, \rho_i) \cap B(x_{i,l}, \rho_i) = \emptyset \text{ för } j \neq l,$$

(23) $$k > \frac{c\gamma(1-u)}{\eta}.$$

Se Figur 3.1 för en skiss av situationen då k är litet.



Figur 3.1: Kulorna $B(x_{i,j}, \rho_i)$ som skär planen W_i.

Låt

$$B_i = \bigcup_{j=1}^{k} B(x_{i,j}, \rho_i) \text{ för } i = 1, \ldots q.$$

Det följer trivialt av (20) och (21) att $\pi_V B_i \subset B(b_i, 3\rho_i)$. Därmed är mängderna B_i disjunkta enligt (12). Vidare följer av (21), (14) och $\eta < (1-u)/8$ att

$$|x_{i,j} - e_i| \leq \mathcal{H}^1(J_i) + \rho_i = \frac{\gamma(1-u)\rho_i}{16\eta} + \rho_i < \frac{(1-u)r}{4}.$$

Låt b_i' vara som förut ($\pi_V b_i' = b_i$). Då implicerar (18), (14) och (9) att

$$\begin{aligned}
|e_i - b_i'| &\leq |e_i - \pi_W e_i| + |\pi_W e_i - b_i'| \\
&\leq \eta r + \frac{|\pi_V(\pi_W e_i) - b_i|}{\gamma} \\
&\leq \eta r + \frac{|\pi_V(\pi_W e_i - e_i)|}{\gamma} + \frac{|\pi_V e_i - b_i|}{\gamma} \\
&\leq \eta r + \frac{\eta r}{\gamma} + \frac{\rho_i}{\gamma} \leq \frac{3\eta r}{\gamma} < \frac{(1-u)r}{2}
\end{aligned}$$

Det följer att $B_i \subset B(a, r)$, ty

$$|x_{i,j} - a| + \rho_i \leq |x_{i,j} - e_i| + |e_i - b_i'| + |b_i' - a| + \rho_i = r\frac{7+u}{8} < r.$$

Därmed implicerar (22), (1) och (23) att

$$\mathcal{H}^m(E \cap B_i) = \sum_{j=1}^{k} \mathcal{H}^m(E \cap B(x_{i,j}, \rho_i)) > k\delta\rho_i^m > \frac{c\gamma(1-u)}{\eta}\delta\rho_i^m \text{ för } i = 1, \ldots, q.$$

Då detta kombineras med (7) och (17) fås att

$$3^m r^m > \mathcal{H}^m(E \cap B(a, r)) \geq \sum_{i=1}^{q} \mathcal{H}^m(E \cap B_i) \geq \frac{c}{\eta}\delta \sum_{i=1}^{q} \rho_i^m > \frac{c\gamma(1-u)\delta t r^m}{100^m \eta}.$$

Detta är en motsägelse eftersom c, δ, γ och t inte beror av η och detta borde gälla för alla $\eta > 0$. Följaktligen gäller (10) och satsen följer eftersom $\epsilon > 0$ var godtyckligt. $\square$

Observera att vi bevisade något mer än satsen påstående. Exempelvis kan det finnas högst en sådan linje $V \in Gr(1, \mathbb{R}^2)$ att $\mathcal{H}^1(\pi_V E) = 0$, då $E \subset \mathbb{R}^2$ är en 2-rektifierbar mängd men ändligt $\mathcal{H}^2$ mått. En sådan linje existerar endast om linjerna $W \in (a, 1, \mathbb{R}^2)$ är parallella för alla $a \in K_1$ och $0 < r \leq r_2$ i beviset ovan.

Vi visar härnäst att om $E \subset \mathbb{R}^n$ är en m-mängd och (i) i Sats 3.20 gäller, d.v.s mängden E är regelbunden, så är E m-rektifierbar. För att visa detta räcker det att hitta en sådan kompakt mängd $K \subset E$ med positivt mått att (2) och (5) i beviset för Sats 3.20 gäller. Nedan ger vi med hjälp av en rad lemman ett detaljerat bevis. Det kommer att visa sig att man har nytta av följande mängdkonstruktion: om $A \subset \mathbb{R}^n$ så betecknar vi $A^{(0)} = A$, $A^{(1)} = \{2a - b \colon a, b \in A\}$ och $A^{(k)} = (A^{(k-1)})^{(1)}$.

Lemma 3.21. *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara en regelbunden m-mängd, låt $\epsilon > 0$ och låt $\delta > 0$. Då existerar det ett sådant positivt tal d_1 och en sådan m-mängd $E_1 \subset E$ att $\mathcal{H}^m(E \setminus E_1) < \epsilon$ och $2a - b \in E(\delta|a - b|)$, då $a, b \in E_1$ och $|a - b| < d_1$.*

Bevis. Vi kan anta att $0 < \delta < 1$. Låt $0 < \eta < 1/3$ och låt $\epsilon > 0$. Enligt Sats 1.17 och eftersom E är regelbunden så existerar det ett positivt tal d_1 och en sådan m-mängd $E_1 \subset E$ att $\mathcal{H}^m(E \setminus E_1) < \epsilon$,

(1) $$\mathcal{H}^m(E \cap S) \leq (1 + \eta^m) d(S)^m \text{ om } E_1 \cap S \neq \emptyset \text{ och } d(S) < 2d_1$$

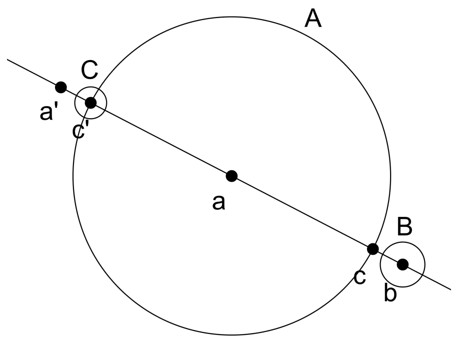
och

(2) $$\mathcal{H}^m(E \cap B(a, r)) > (1 - \eta^m) 2^m r^m \text{ om } a \in E_1 \text{ och } 0 < r < d_1.$$

Låt $a, b \in E_1$ vara sådana att $0 < |a - b| = \rho < d_1$ och beteckna

$$a' = 2a - b, \qquad c = 3\eta a + (1 - 3\eta) b, \qquad c' = 3\eta a + (1 - 3\eta) a',$$
$$A = B(a, (1 - 3\eta)\rho), \qquad B = B(b, 2\eta\rho) \qquad C = B(c', \frac{\delta(1 - 3\eta)\rho}{2}).$$

Se Figur 3.2.



Figur 3.2: Mängderna A, B och C.

Då gäller att $c, c' \in \partial A$ och $|c - c'| = 2(1 - 3\eta)\rho$. Om

$$M = \sup\{\frac{|x - c|}{(1 - 3\eta)\rho} \colon x \in A \setminus C\},$$

så är $M < 2$ och M beror bara av δ och n. Låt $\eta < \min\{\frac{\delta}{-3\delta+6}, \frac{2-M}{11-3M}\}$. Då är

(3) $$\frac{\delta(1-3\eta)}{2} + 3\eta < \delta$$

och

(4) $$M(1-3\eta) + 5\eta < 2(1-3\eta).$$

Låt $S = (A \cup B) \setminus C$. Då följer av (3) att $C \subset B(a', \delta\rho)$. Av (4) följer att $d(S) < 2(1-3\eta)\rho < 2d_1$. Eftersom vi valde $\delta < 1$ så är $(d(C) + d(B))/2 < d(c', b)$ och därmed är $B \cap C = \emptyset$. Således implicerar (1) att

$$\mathcal{H}^m(E \cap S) \leq (1 + \eta^m) 2^m (1 - 3\eta)^m \rho^m.$$

Av (2) följer att

$$\mathcal{H}^m(E \cap A) > (1 - \eta^m) 2^m (1 - 3\eta)^m \rho^m$$

och eftersom $2\eta < 1$ så är

$$\mathcal{H}^m(E \cap B) > (1 - \eta^m) 2^{2m} \eta^m \rho^m.$$

Följaktligen är

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^m(E \cap B(a', \delta\rho)) &\geq \mathcal{H}^m(E \cap A \cap C) \\ &= \mathcal{H}^m(E \cap A) + \mathcal{H}^m(E \cap B) - \mathcal{H}^m(E \cap S) \\ &> 2^{m+1} \eta^m \rho^m (2^{m-1}(1 - \eta^m) - (1 - 3\eta)^m) \end{aligned}$$

och därmed positivt. Således är $E \cap B(a', \delta\rho) \neq \emptyset$. Eftersom a, b vara godtyckliga element som uppfyllde antagandena är lemmat därmed bevisat. □

Lemma 3.22. *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara en regelbunden m-mängd, $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ och $N \in \mathbb{N}$. Då finns det ett positivt tal d_N och en sådan mängd $E_N \subset E$ att $\mathcal{H}^m(E \setminus E_N) < \epsilon$ och $A^{(N)} \subset E(\delta d(A))$ då $A \subset E_N$ och $d(A) < d_N$.*

Bevis. Låt $\epsilon > 0$ och låt $0 < \delta < 1$. Fallet $N = 1$ följer av Lemma 3.21. Vi gör induktionsantagandet att påståendet gäller då $N = l$ och visar att det gäller när $N = l + 1$. Då kan vi för en given regelbunden m-mängd E hitta ett positivt tal d'_l och en sådan m-mängd $E_l \subset E$ att $\mathcal{H}^m(E \setminus E_l) < \epsilon/2$ och följande gäller: Om $B \subset E_l$ och $d(B) < d'_l$ så gäller att

(1) $$B^{(l)} \subset E(\frac{1}{6}\delta d(B)).$$

Av Lemma 3.21 följer att vi kan hitta ett tal d' och en sådan m-mängd $E_{l+1} \subset E_l$ att $\mathcal{H}^m(E_l \setminus E_{l+1}) < \epsilon/2$ och följande gäller: om $A \subset E_{l+1}$ och $d(A) < d'$ så är

$$A^{(1)} \subset E_l(3^{-l-1}\delta d(A)). \tag{2}$$

Vi definierar

$$B = E_l \cap A^{(1)}(3^{-l-1}\delta d(A)) \subset E_l.$$

Då är

$$A^{(1)} \subset B(3^{-l-1}\delta d(A)). \tag{3}$$

Vidare gäller att

$$\begin{aligned} d(B) \leq d(A^{(1)}(3^{-l-1}\delta)) &= d(A^{(1)}) + 2 \cdot 3^{-l-1}\delta d(A) \\ &\leq 3d(A) + 2 \cdot 3^{-l-1}\delta d(A) \leq 4d(A). \end{aligned} \tag{4}$$

Vi kan välja $d_{l+1} = \min\{\frac{1}{4}d_l, d'\}$. Låt $A \subset E_{l+1}$ och $d(A) < d_{l+1}$. Då gäller (2) och vi kan definiera mängden $B \subset E_l$ så att (3) och (4) gäller. Av vårt val av A och B följer att (1) gäller. Följaktligen implicerar (4) att

$$B^{(l)} \subset E(\frac{1}{6}\delta d(B)) = E(\frac{2}{3}\delta d(A)).$$

Av (3) följer därmed att

$$A^{(l+1)} \subset (B(3^{-l-1}\delta d(A)))^{(l)} = B^{(l)}(\frac{1}{3}\delta d(A)) \subset E(\delta d(A)).$$

□

Lemma 3.23. *Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ och*

$$x = \sum_{j=1}^{k} \beta_j a_j \text{ och } \sum_{j=1}^{k} |\beta_j| \leq 2l + 1,$$

där $a_j \in A$ och $j = 1, \ldots, k$, $\sum_{j=1}^{k} \beta_j = 1$, l är ett positivt heltal och β_j är heltal och exakt ett av dem är udda. Då är $x \in A^{(l)}$.

Bevis. Fallet $l = 0$ och $l = 1$ är klart. Vi antar att påståndet gäller för $l = N$ och visar att det gäller för $l = N + 1$. Anta att $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ är en sådan följd av heltal att

$$\sum_{j=1}^{k} \beta_j = 1, \qquad \sum_{j=1}^{k} |\beta_j| \leq 2(N + 1) + 1$$

och exakt ett β_j är udda. Då finns det en sådan följd $(\beta'_1, \ldots, \beta'_k)$ som uppfyller satsens påståenden då $l = N$ och för vilken det vidare gäller att

$$(\beta_1, \ldots, \beta_k) = (-\beta'_1, \ldots, 2 - \beta_i, \ldots, -\beta'_k), \text{ där } 1 \leq i \leq k,$$

då i valts så att $\beta_i > 1$. Vi skriver

$$x = \sum_{j=1}^{k} \beta_j a_j = 2a_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \beta'_j a_j,$$

där $a_j \in A$, $j = 1, \ldots, k$. Eftersom $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \beta'_j a_j \in A^{(l)}$ och $a_k \in A \subset A^{(l)}$ så följer lemmat av definitionen för $A^{(l+1)}$. $\square$

Om $A \subset \mathbb{R}^n$ så avser vi med SpA det (dimensionmässigt) minsta affina delrum av $\mathbb{R}^n$ som innehåller A.

Lemma 3.24. *Låt k vara ett sådant heltal att $1 \leq k < n$ och låt λ och p vara sådana reella tal att $0 < \lambda < 1$ och $p > 1$. Då existerar det ett sådant positivt heltal $N = N(k, \lambda, p)$ att följande gäller: om $r > 0, A = \{a_0, \ldots, a_k\} \subset \mathbb{R}^n, |a_i - a_0| \leq r$ och $d(a_i, Sp\{a_0, \ldots, a_{i-1}\}) \geq \lambda r$ då $i = 1, \ldots, k$ så är $SpA \cap B(a_0, pr) \subset A^{(N)}(kr)$.*

Bevis. Anta att r och $A = \{a_0, \ldots, a_k\}$ är som i lemmat ovan. Vi kan förflytta de ifrågavarande mängderna med en isometri och anta att $a_0 = 0$. Låt $a \in SpA \cap B(0, pr)$. Av definitionen för SpA följer att det finns sådana tal $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ att $a = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$. Vi väljer sådana jämna heltal $\beta_1, \ldots, \beta_k$ att $|\beta_j - \alpha_j| \leq 1$, då $i = 1, \ldots, k$. Vi skriver $b = \sum_{i=1}^{k} \beta_i a_i$. Således är $|a - b| \leq kr$ och det räcker därmed att visa att $b \in A^{(N)}$, för något N som beror endast av k, λ och p. Om vi definierar $\beta_0 = 1 - \sum_{i=1}^{k} \beta_i$ så är $b = \sum_{i=0}^{k} \beta_i a_i$.

Enligt Lemma 3.23 räcker det att hitta en övre gräns för summan av $\beta_1, \ldots, \beta_k$ som beror endast av k, λ och p. Eftersom $d(a_k, Sp\{a_0, \ldots, a_{k-1}\}) > 0$ så existerar en sådan vektor $e_k \in SpA$ att $|e_k| = 1$ och $e_k \perp Sp\{a_0, \ldots, a_{k-1}\}$. Då är

$$|a_k \cdot e_k| = d(a_k, Sp\{a_0, \ldots a_{k-1}\}) \geq \lambda r.$$

Enligt Cauchy-Schwartz olikhet är därmed

$$pr \geq |a||e_k| \geq |a \cdot e_k| = |\alpha_k a_k \cdot e_k| \geq |\alpha_k|\lambda r, \tag{1}$$

vilket innebär att $|\alpha_k| < p/\lambda$. Vi kan fortsätta på motsvarande sätt. Vi väljer $e_{k-1} \in Sp\{a_0, \ldots, a_{k-1}\}$, $|e_{k-1}| = 1$ och $e_{k-1} \perp Sp\{a_0, \ldots, a_{k-2}\}$. Av (1) följer att

$$|\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i a_i| \leq |a| + |\alpha_k||a_k| \leq pr(1 + \lambda^{-1}),$$

och genom att byta ut e_{k-1} mot e_k, a mot $\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i a_i$ och använda (1) kan vi sluta oss till att $|\alpha_{k-1}| \leq p(1+\lambda^{-1})\lambda^{-1}$. Genom att fortsätta analogt kan vi visa att

$$|\alpha_i| \leq p(1+\lambda^{-1})^{k-i}\lambda^{-1}, \text{ för } i = 1, \ldots, k.$$

Lemmat följer eftersom $|\beta_i - \alpha_i| \leq 1$ för $i = 1, \ldots, k$. □

Lemma 3.25. *Det finns en sådan konstant $K > 1$, som beror endast av m, att det för varje regelbunden m-mängd $E \subset \mathbb{R}^n$ och $\epsilon > 0$ finns ett tal r_0 och en m-mängd $E_1 \subset E$ för vilka gäller att:*

(i) $\mathcal{H}^m(E \setminus E_1) < \epsilon$.

(ii) *Om* $0 < r < r_0,\ a \in E_1$ *och* $V \in A(a, m+1, \mathbb{R}^n)$ *så är* $V \cap B(a, Kr) \not\subset E_1(r)$.

Bevis. Låt $\epsilon > 0$ och $E \subset \mathbb{R}^n$ vara en regelbunden m-mängd. Då finns det ett tal $r_0 > 0$ och en sådan m-mängd $E_1 \subset E$ att $\mathcal{H}^m(E \setminus E_1) < \epsilon$ och

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{2}(2r)^m < \mathcal{H}^m(E \cap B(a,r)) < 2(2r)^m, \text{ då } a \in E_1 \text{ och } 0 < r < (2K+3)r_0.$$

Låt $a \in E_1$. Vi gör ett motantagande. Det finns ett sådant tal r_1 att $0 < r_1 \leq r_0$ och för något affint delrum $V \in A(a, m+1, \mathbb{R}^n)$ gäller att $V \cap B(a, Kr_1) \subset E_1(r_1) = \cup_{e \in E_1} B(e, r_1)$. Låt

$$\mathcal{B} = \{B(e, r_1) \colon e \in E_1,\ B(e, r_1) \cap V \cap B(a, Kr_1) \neq \emptyset\}.$$

Låt $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ vara någon maximal mängd bestående av disjunkta kulor. Med maximal mängd avses i det här fallet att om $e' \in E_1$ och $B' = B(e', r_1)$ så existerar en sådan kula $B(e, r_1) \in \mathcal{B}_1$ att $B' \cap B(e, r_1) \neq \emptyset$. Följaktligen är $\mathcal{B}_1$ en ändlig mängd. Dess element kan numreras $\mathcal{B}_1 = \{B(e_1, r_1), \ldots, B(e_l, r_1)\}$ och

$$V \cap B(a, Kr_1) \subset \bigcup_{i=1}^{l} B(e_i, 3r_1).$$

En jämförelse av $\mathcal{H}^{m+1}$ mått ger att

$$\text{(2)} \qquad K^{m+1} \leq 3^{m+1} l.$$

Samtidigt gäller att

$$\bigcup_{i=1}^{l} B(e_i, r_i) \subset V \cap B(a, (K+2)r_1) \subset B(e_1, (2K+3)r_1).$$

Av (1) följer därmed att

$$
\begin{aligned}
2(2(2K+3)r_1)^m &> \mathcal{H}^m(E \cap B(e_1,(2K+3)r_1)) \\
&\geq \sum_{i=1}^{l} \mathcal{H}^m(E \cap B(e_i, r_i)) \\
&> l\frac{1}{2}(2r_1)^m,
\end{aligned}
$$

vilket innebär att $4(2K+3)^m > l$. Detta kombinerat med (2) ger en motsägelse för tillräckligt stora K. □

Lemma 3.26. *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara en regelbunden m-mängd, $\epsilon > 0$ och $0 < \lambda < 1$. Då finns det ett positivt tal r^* och en sådan m-mängd $E^* \subset E$ att*

(i) $\mathcal{H}^m(E \setminus E^*) < \epsilon$ *och*

(ii) *om $a \in E^*$ och $0 < r < r^*$, så finns ett sådant $V \in A(a, m, \mathbb{R}^n)$ att $E^* \cap B(a, r) \setminus V(\lambda r) = \emptyset$.*

Bevis. Låt $\epsilon > 0$, låt K, r_0 och E_1 vara som i Lemma 3.25 med ϵ utbytt mot $\epsilon/2$ och välj $p = (n+2)K$. Låt $N = N(m+1, \lambda, p)$ vara som i Lemma 3.24. Av Korollarium 1.15 följer att E_1 är en regelbunden m-mängd. Därmed följer av Lemma 3.22, då vi i lemmat väljer $\delta = 1$, att det finns ett positivt tal $d_N < r_0$ och en sådan m-mängd $E_N \subset E_1$ att $\mathcal{H}^m(E_1 \setminus E_N) < \epsilon/2$ och

(1) $$A^{(N)} \subset E_1(d(A)) \text{ då } A \subset E_N \text{ och } d(A) < d_N.$$

Vi visar att $r^* = (n+2)^{-1}d_N$ och $E^* = E_N$ uppfyller utsagorna i lemmat. Vi gör motantagandet att det finns en punkt $a_0 \in E_N$ och ett sådant positivt tal $r < (n+2)^{-1}d_N$ att

$$E_N \cap B(a_0, r) \setminus V(\lambda r) \neq \emptyset \text{ för alla } V \in A(a_0, m, \mathbb{R}^n).$$

Välj något $V_0 \in A(a_0, m, \mathbb{R}^n)$. Då finns det ett $a_1 \in E_N \cap (B(a_0, r) \setminus V_0(\lambda r))$. Därefter väljer vi $V_1 \in A(a_0, m, \mathbb{R}^n) \cap A(a_1, m, \mathbb{R}^n)$ och $a_2 \in E_N \cap (B(a_0, r) \setminus V_1(\lambda r))$. Genom att fortsätta på motsvarande sätt får vi punkterna $a_0, \ldots, a_{m+1}$ och sådana affina delrum $V_0, \ldots, V_m$ att

$$a_i \in E_n \cap B(a_0, r) \setminus V_{i-1}(\lambda r) \text{ då } i = 1, \ldots, m+1$$

och

$$\{a_0, \ldots a_i\} \subset V_i \text{ för } i = 1, \ldots, m.$$

I och med detta är

$$d(a_i, Sp\{a_0, \ldots, a_{i-1}\}) \geq d(a_i, V_{i-1}) > \lambda r \text{ för } i = 1, \ldots, m+1.$$

Vi betecknar $A = \{a_0, \dots, a_{m+1}\}$. Då är $d(A) \le d(B(a_0, r)) = 2r < d_N$. Detta leder till att

$$\begin{aligned} SpA \cap B(a_0, K(n+2)r) &= SpA \cap B(a_0, pr) \\ &\subset A^{(N)}((m+1)r) \subset E_1((m+3)r) \subset E_1((n+2)r). \end{aligned}$$

Den första inklusionen ovan följer av Lemma 3.24, den andra följer av (1) och den sista följer av det faktum att $0 < m < n$. Väljer vi $d = (n+2)r < d_N < r_0$ får vi en motsägelse enligt Lemma 3.25. □

Lemma 3.27. *Låt $E \subset \mathbb{R}^m$ vara en regelbunden m-mängd och låt $\epsilon > 0$. Då finns det ett positivt tal d och en sådan m-mängd $E_1 \subset E$ att om $a \in \mathbb{R}^n$, $V \in A(a, m, \mathbb{R}^n)$, $B \subset V$ är en Borelmängd och $0 < h < l < d$ så är*

$$\mathcal{H}^m(E_1 \cap \pi_V^{-1}(B) \cap V(h)) \le (1+\epsilon)(1 + \frac{h}{l})^m \mathcal{H}^m(B(l) \cap V).$$

Bevis. Låt E, a och V vara som ovan och låt $\epsilon > 0$. Eftersom måttet $\mathcal{H}^m$ är rotationsinvariant kan vi anta att $V = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}$. Av Sats 1.17 följer att det finns ett $d > 0$ och en sådan m-mängd $E_1 \subset E$ att

(1) $$\mathcal{H}^m(E_1 \cap U) \le (1+\epsilon)(d(U))^m \text{ då } d(U) < 4d.$$

Låt $B \subset V$ vara en godtycklig Borelmängd och $0 < h < l < d$. Vi definierar mängderna

$$C(x_1, \dots, x_m) = V(h) \cap \{y \in \mathbb{R}^n \colon (x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_m - y_m)^2 < l^2\}.$$

och funktionen

$$f(x_1, \dots, x_m, x_1', \dots, x_n') = \begin{cases} 1 & \text{om } (x_1', \dots, x_n') \in C(x_1, \dots, x_m) \\ 0 & \text{om } (x_1', \dots, x_n') \notin C(x_1, \dots, x_m) \end{cases}$$

Vi betecknar $A = E_1 \cap \pi_V^{-1}(B) \cap V(h)$. Då är

(2) $$\begin{aligned} \alpha(m) l^m \mathcal{H}^m(A) &= \int_A \alpha(m) l^m \,\mathrm{d}\mathcal{H}^m \\ &= \int_A \Big(\int_{B(l)\cap V} f(x_1, \dots, x_m, x_1', \dots, x_n') \,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m \Big) \,\mathrm{d}\mathcal{H}^m \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \Big(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_{B(l)\cap V} f(x_1, \dots, x_m, x_1', \dots, x_n') \Big) \,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m \,\mathrm{d}\mathcal{H}^m \llcorner A \\ &= \int_{B(l)\cap V} \Big(\int_A f(x_1, \dots, x_m, x_1', \dots, x_n') \,\mathrm{d}\mathcal{H}^m \Big) \,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m \\ &= \int_{B(l)\cap V} \mathcal{H}^m(A \cap C(x_1, \dots, x_m)) \,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m. \end{aligned}$$

Den tredje likheten är utskriven för att förtydliga att vi kan använda Fubinis sats; de ifrågavarande funktionerna är Borel och måtten är σ-additiva. (Vi har identifierat V som $\mathbb{R}^m$.)

Eftersom $d(C(x_1,\ldots,x_m)) = 2\sqrt{h^2+l^2} < 2(h+l) < 4d$ så följer av (1) att

$$\begin{aligned}(3)\qquad \mathcal{H}^m(E_1 \cap \pi_V^{-1}(B) \cap V(h) \cap C(x_1,\ldots,x_m)) &\leq \mathcal{H}^m(E_1 \cap C(x_1,\ldots,x_m)) \\ &\leq (1+\epsilon)(2(h+l))^m.\end{aligned}$$

Nu följer av (3) och (2) att

$$\alpha(m) l^m \mathcal{H}^m(E_1 \cap \pi_V^{-1}(B) \cap V(h)) \leq (1+\epsilon)(2(h+l))^m \mathcal{L}^m(B(l) \cap V)$$

vilket är ekvivalent med att

$$\mathcal{H}^m(B(0,l))\mathcal{H}^m(E_1 \cap \pi_V^{-1}(B) \cap V(h)) \leq (1+\epsilon)(2(h+l))^m \mathcal{H}^m(B(l) \cap V),$$

där $B(0,l) \subset \mathbb{R}^m$. Lemmat följer då vi delar med $\mathcal{H}^m(B(0,l)) = (2l)^m$.

$\square$

Lemma 3.28. *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara en regelbunden m-mängd och $0 < \eta < 1$. Då finns det ett positivt tal r_0 och en m-mängd $E_1 \subset E$ med följande egenskaper:*

Om $a \in E_1$ och $0 < r < r_0$ så finns det ett sådant $V \in A(a,m,\mathbb{R}^m)$ att

(i) $$E_1 \cap B(a,r) \setminus V(\eta r) = \emptyset \text{ och}$$

(ii) $$V \cap B(a,r) \subset E(\eta r).$$

Bevis. Låt $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ och låt $0 < \eta < 1$. Av 3.27, 3.26 och 1.15 följer att vi kan välja en m-mängd $E_1 \subset E$ och ett positivt tal d_1 med följande egenskaper:

Om $a \in \mathbb{R}^n$, $V \in A(a,m,\mathbb{R}^n)$, $B \subset V$ är en Borelmängd och $0 < h < l < d_1$ så är

(1) $$\mathcal{H}^m(E_1 \cap \pi_V^{-1}(B) \cap V(h)) \leq (1+\epsilon)(1+\frac{h}{l})^m \mathcal{H}^m(B(l) \cap V).$$

Om $a \in E_1$ och $0 < r < d_1$, så finns ett sådant $V \in A(a,m,\mathbb{R}^n)$ att

(2) $$E_1 \cap B(a,r) \setminus V(\epsilon^2 \eta r) = \emptyset,$$

och

(3) $$\mathcal{H}^m(E_1 \cap B(a,r)) > (1-\epsilon)(2r)^m \text{ om } a \in E_1 \text{ och } 0 < r < d_1.$$

Låt $a \in E_1$, $0 < r < d$ och välj V som i (2). Då är det klart att (i) följer av (2). Vi antar att (ii) inte gäller. Vi kan välja en sådan punkt $b \in V \cap B(a,r)$ att $B(b,\eta r) \cap E = \emptyset$. Låt $B = V \cap (B(a,r) \setminus B(b, \frac{\eta r}{2}))$. Eftersom $\epsilon^2 < \frac{1}{2}$ så är

$$E_1 \cap V(\epsilon^2 \eta r) \cap B(a,r) \subset E_1 \cap V(\epsilon^2 \eta r) \cap \pi_V^{-1}(B).$$

Därmed följer av (2) och (3) att

$$\mathcal{H}^m(E_1 \cap V(\epsilon^2 \eta r) \cap \pi_V^{-1}(B)) \geq \mathcal{H}^m(E_1 \cap B(a,r)) > (1-\epsilon)(2r)^m. \tag{4}$$

Av definitionen för B och det faktum att $\epsilon < \frac{1}{2}$ följer att

$$\mathcal{H}^m(B(\epsilon \eta r) \cap V) \leq ((1+\epsilon\eta)^m - (\frac{1}{2} - \epsilon)^m (\frac{\eta}{2})^m)(2r)^m. \tag{5}$$

Vi väljer $h = \epsilon^2 \eta r$ och $l = \epsilon \eta r$. Då ϵ är litet är $0 < h < l < d_1$. Då följer av (4), (1) och (5) att

$$(1-\epsilon)(2r)^m < (1+\epsilon)^{m+1}((1+\epsilon\eta)^m - (\frac{1}{2} - \epsilon)^m (\frac{\eta}{2})^m)(2r)^m.$$

Talet ϵ kan väljas så litet att detta är en motsägelse. □

Nedan bevisas Sats 3.17.

Bevis. Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara en regelbunden m-mängd och låt $\epsilon > 0$. Då finns det en sådan kompakt mängd $K \subset E$ att $\mathcal{H}^m(E \setminus K) < \epsilon$ och sådana positiva tal δ och r_0 att

$$\mathcal{H}^m(E \cap B(a,r)) > \delta r^m \text{ då } a \in K \text{ och } 0 < r < r_0.$$

Av Lemma 3.28 följer att det finns en kompakt mängd $K_1 \subset K$ med positivt mått och ett sådant positivt tal $r_1 < r_0$ att det för alla $a \in K_1$ och $0 < r < r_1$ finns ett sådant $W \in A(a,m,\mathbb{R}^n)$ att

$$K_1 \cap B(a,r) \setminus W(\eta r) = \emptyset \text{ och } W \cap B(a,r) \subset K(\eta r).$$

Genom att använda Lemma 3.28 på nytt för mängden K_1 kan vi hitta en punkt $a \in K_1$ för vilken det finns det ett sådant positivt tal $r_2 < r_1$ att det för alla $0 < r < r_2$ finns affina delrum $W \in A(a,m,\mathbb{R}^n)$ för vilka (2), (6), (7) och (8) i Sats 3.20 gäller. Genom att fortsätta på exakt samma sätt som i Sats 3.20 kan vi visa att E är m-rektifierbar. □

Med hjälp av karakterisering med densitet kan man visa att flera självliknande mängder är helt orektifierbara.

Exempel 3.29. Sierpinskis tetraeder S_2 är en helt 2-orektifierbar mängd, ty $\Theta^{*2}(S_2, a) < 1$ för alla $a \in S_2$.

Mängden $C(1/4) \times C(1/4)$ är helt 1-orektifierbar, där $C(1/4)$ är den Cantormängd som bildas då de ifrågavarande intervallen har längden $(1/4)^n$ efter n iterationer. Detta gäller eftersom

$$\Theta_*^1(C(1/4) \times C(1/4), a) \leq \frac{\mathcal{H}^1(C(1/4) \times C(1/4))}{4} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} < 1,$$

för alla $a \in C(1/4) \times C(1/4)$. Av beviset för Sats 3.20 följer också att mängden $C(1/4) \times C(1/4)$ är helt 1-orektifierbar eftersom måttet för dess projektion på koordinataxlarna är noll.

3.3.3 Projektioner

3.3.3.1 Projektioner i $\mathbb{R}^2$

Sats 3.30. Karakterisering med projektioner. *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara en mätbar delmängd med $\mathcal{H}^m(E) < \infty$.*

(i) *E är m-rektifierbar om och endast om $\mathcal{H}^m(\pi_V B) > 0$ för $\gamma_{n,m}$ nästan alla $V \in Gr(m, \mathbb{R}^n)$, där $B \subset E$ är $\mathcal{H}^m$ mätbar och $\mathcal{H}^m(B) > 0$.*

(ii) *E är helt m-orektifierbar om och endast om $\mathcal{H}^m(\pi_V E) = 0$ för $\gamma_{n,m}$ nästan alla $V \in Gr(m, \mathbb{R}^n)$.*

Eftersom vi bevisat sats 3.20 räcker det att visat att om E är helt m-orektifierbar så är $\mathcal{H}^m(\pi_V E) = 0$ för $\gamma_{n,m}$ nästan alla $V \in Gr(m, \mathbb{R}^n)$ för att alla utsagor i sats 3.30 skall gälla. Herbert Federer var den förste att bevisa detta. Besicovitch hade dock tidigare bevisat fallet $n = 2$. Vi utgår inte från Federers bevis. I detta delkapitel bevisar vi fallet då $E \subset \mathbb{R}^2$ med hjälp av Besicovitch idéer återgivna av Falconer [3].

Vi betecknar en linje som är parallell med en linje som går genom origo och bildar vinkeln θ med x-axeln med L_θ och om linjen går genom x skriver vi $L_\theta(x)$.

Definition 3.31. En riktning θ är en klusterriktning av första ordningen för punkten x i mängden $E \subset \mathbb{R}^n$ om

$$\mathcal{H}^0(L_\theta(x) \cap E \cap B(x, r)) = \infty \text{ då } r > 0.$$

För ett givet E och $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ och givna positiva tal ρ, ϵ och k definierar vi en delmängd $T(x, \rho, \epsilon, k)$ av $[0, \pi)$ så att $\theta \in T(x, \rho, \epsilon, k)$ om det existerar ett sådant r att

$0 < r < \rho$ och ett sådant öppet intervall $I \subset [0, \pi)$ att $\theta \in I$ och $|I| < \epsilon$ för vilka gäller att
$$\frac{\mathcal{H}^1(E \cap C_r(x, I))}{r} \geq k|I|,$$
där $C_r(x, I)$ består av de två koner som består av punkter som hör till $L_\theta(x)$ för något $\theta \in I$ och som också är element i $B(x, r)$. $T(x, \rho, \epsilon, k)$ är en union av intervall som är öppna i $[0, \pi)$ och därmed en Borelmängd.

Anta att x_I är mittpunkten för ett intervall $I \subset [0, \pi)$ och att $x \in \mathbb{R}^n$. Då är $C_r(x, I) = X(x, r, V_{x_I}, \sin(\frac{|I|}{2}))$, där $V_{x_I} \in Gr(1, \mathbb{R}^2)$ är en linje som bildar en vinkel med x-axeln vars storlek är x_I. Den nya beteckningen $C_r(x, I)$ används för att behändigare bedöma konernas storlek.

Definition 3.32. En riktning θ är en klusterriktning av andra ordningen för punkten x i mängden $E \subset \mathbb{R}^n$ om $\theta \in T$, där
$$T = \bigcap_{\rho > 0} \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcap_{0 < k < \infty} T(x, \rho, \epsilon, k).$$

Definition 3.33. En punkt $x \in E$ är en strålningspunkt för mängden E om $\mathcal{L}^1 \llcorner [0, \pi)$ nästan alla θ i $[0, \pi)$ är klusterriktningar (av första eller andra ordningen) för punkten x i mängden E.

Lemma 3.34. *Låt $F \subset \mathbb{R}^2$ vara en sluten oregelbunden 1-mängd. Då är nästan alla punkter i F strålningspunkter.*

Bevis. Av Sats 3.17 (2) och Lemma 3.14 följer att för $\mathcal{H}^1$-nästan alla $x \in F$ och för ett godtyckligt intervall $I \subset [0, \pi)$ är

(1)
$$\limsup_{x \to 0} \frac{\mathcal{H}^1(F \cap C_r(x, I))}{2r} \geq \frac{1}{t}|I|,$$

där $t = 640$, ty $X(x, r, L_\theta, s) = C_r(x, I_\theta)$, där $I_\theta = (L_\theta - \arcsin s, L_\theta + \arcsin s)$. (Olikhet (1) kan visas utan Sats 3.17 och den undre gränsen kan höjas. Se Falconer [3].) Vi väljer en sådan punkt x. Det räcker att visa att x är en strålningspunkt. Vi betecknar i förkortad form $L_\theta = L_\theta(x)$.

Först visar vi att mängden K av klusterriktningar av första ordningen är en Lebesgue mätbar delmängd av $[0, \pi)$. Låt K_r vara mängden av θ för vilka $L_\theta \cap B(x, r) \cap F \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Då är
$$K_r = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{r, \frac{1}{n}},$$

där $K_{r,\frac{1}{n}} = \{\theta\colon$ det existerar $y \in L_\theta \cap F$ då $\frac{1}{n} \leq |x-y| \leq r\}$. Mängden $K_{r,\frac{1}{n}}$ är sluten för alla $n \in \mathbb{N}$. Beviset är analogt med beviset för första delen av nästa lemma. Följaktligen är K_r Borel och eftersom $K = \cap_{j=1}^{\infty} K_{\frac{1}{n}}$, så är K också en Borelmängd och därmed Lebesgue mätbar.

Det räcker att visa att om ρ, ϵ och k är godtyckliga positiva tal så är $\theta \in T(x, \rho, \epsilon, k)$ för nästan alla $\theta \notin K$. Låt $\theta \in [0, \pi)$ vara sådan att Lebesguedensiteten för K i punkten θ, $\lim_{r\to 0} \mathcal{L}^1(K \cap [\theta - r, \theta + r])/2r$, är 0. I detta bevis avses med Lebesguemåttet dess restriktion till mängden $[0, \pi)$, $\mathcal{L}^1 \llcorner [0, \pi)$. Av Sats 1.14 (2) följer att ovanstående gäller för $\mathcal{L}^1$ nästan alla $\theta \notin K$. För tillräckligt små intervall I för vilka $\theta \in I \subset [0, \pi)$ är

$$\mathcal{L}^1(K \cap I) < \frac{|I|}{tk}.$$

Låt I vara ett sådant intervall och $0 < |I| < \epsilon$. Eftersom $K = \cap K_r$ och K_r är mätbar för alla $r > 0$ så finns det ett sådant $\rho_1 \leq \rho$ att om $r < \rho_1$ så är

$$\mathcal{L}^1(K_r \cap I) < \frac{|I|}{tk}. \tag{2}$$

Av (1) följer att vi kan välja $r < \rho_1$ så att

$$\mathcal{H}^1(F \cap C_r(x, I)) > \frac{2r|I|}{t}. \tag{3}$$

Om $\mathcal{H}^1(F \cap C_r(x, I)) > kr|I|$ nu gäller är beviset klart. Om så inte är fallet kan vi med stöd av (2) och definitionen för Lebesgue mått välja en sådan uppräknelig union av disjunkta intervall att

$$K_r \cap I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subset I \tag{4}$$

och

$$\mathcal{L}^1(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) < \frac{|I|}{tk}. \tag{5}$$

Låt A vara mängden av index i för vilka

$$\mathcal{H}^1(F \cap C_r(x, I_i)) > kr|I_i|. \tag{6}$$

Av (5) följer att

$$\sum_{i \notin A} \mathcal{H}^1(F \cap C_r(x, I_i)) \leq kr\mathcal{L}^1(\bigcup_{i \notin A} I_i) < \frac{r|I|}{t}. \tag{7}$$

Varje punkt $F \cap C_r(x, I)$ ligger på en linje L_θ där $\theta \in K_r \cap I$. Enligt (4) är därmed

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F \cap C_r(x, I_i) \supset F \cap C_r(x, K_r \cap I) \supset F \cap C_r(x, I). \tag{8}$$

Av (8), (7) och (3) följer att

$$\begin{aligned}\sum_{i\in A} \mathcal{H}^1(F \cap C_r(x, I_i)) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(F \cap C_r(x, I_i)) - \sum_{i\notin A} \mathcal{H}^1(F \cap C_r(x, I)) \\ &> \mathcal{H}^1(F \cap C_r(x, I)) - \frac{r|I|}{t} > \frac{r|I|}{t}\end{aligned} \tag{9}$$

Genom att sammanslå överlappande intervall och utvidga intervall kan vi få en sådan familj disjunkta intervall $\{J_j\}_{j=1}^{\infty}$ som är öppna i $[0, \pi)$ och för vilka gäller att

$$J = \bigcup_{j=1}^{\infty} J_j \supset \bigcup_{i\in A} I_i$$

och

$$\mathcal{H}^1(F \cap C_r(x, J_j)) = kr|J_j|, \text{ där } j \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Eftersom vi antog att $\mathcal{H}^1(F \cap C_r(x, I)) \leq kr|I|$ kan vi enligt (4) välja intervallen så att $J \subset I$. Som en följd av (9) och (10) fås att

$$\mathcal{L}^1(J) = \sum_{j=1}^{\infty} |J_j| > \frac{|I|}{tk}.$$

Om $\theta' \in J$ så är $\theta' \in J_j$ för något j, så enligt (10) är $\theta' \in T(x, \rho, \epsilon, k)$. Således är $J \subset T(x, \rho, \epsilon, k) \cap I$, så

$$\mathcal{L}^1(T(x, \rho, \epsilon, k) \cap I) > \frac{|I|}{tk}.$$

Då detta gäller för godyckligt korta intervall I som innehåller θ så gäller för nästan alla $\theta \notin K$ att $\theta \in T(x, \rho, \epsilon, k)$ eller att Lebesguedensiteten för $T(x, \rho, \epsilon, k)$ i punkten θ är åtminstone $1/(tk)$. Av Lebesgues densitetssats följer därmed att nästan alla $\theta \notin K$ hör till $T(x, \rho, \epsilon, k)$. Eftersom

$$T = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{l=l}^{\infty} T(x, \frac{1}{i}, \frac{1}{j}, l)$$

är en uppräknelig union så gäller för nästan alla $\theta \notin S$ att $\theta \in T$.

□

Lemma 3.35. *Om $F \subset \mathbb{R}^2$ är en sluten oregelbunden 1-mängd så är G_1 och G_2 Boreldelmängder av $F \times [0, \pi)$ och är således $(\mathcal{H}^1 \times \mathcal{L}^1)$ mätbara. Här är*

$$G_i = \{(x, \theta) \colon \theta \text{ är en klusterriktning av i:te ordning för } x \in F\} \text{ där } i = 1, 2.$$

Bevis. Låt $0 < r < \rho$ och beteckna

$$G'_{r,\rho} = \{(x, \theta) \colon x \in F \text{ och } r \leq |x - y| \leq \rho \text{ för något } y \in F \cap L_\theta(x)\}.$$

För G_1 räcker det att visa att $G'_{r,\rho}$ är sluten, ty

$$G_1 = \bigcap_{\rho > 0} (\bigcup_{r \leq \rho} G'_{r,\rho})$$

och mängden G_1 förändras inte om vi antar att ρ och r är rationella tal så att snittet och unionen är uppräknelig.

Vi fixerar r och ρ. Att $G'_{r,\rho}$ är sluten följer av att F är sluten. Vi visar detta. Om $G'_{r,\rho} = \emptyset$ finns inget mer att bevisa. I annat fall kan vi välja en följd (x_n, θ_n) i $G_{r,\rho}$ som konvergerar mot punkten (x_0, θ_0). Vi definierar

$$A_n = \{y \colon r \leq |x_n - y| \leq \rho \text{ och } y \in L_{\theta_n}(x_n)\}$$
$$A_0 = \{y \colon r \leq |x_0 - y| \leq \rho \text{ och } y \in L_{\theta_0}(x_0)\}.$$

För varje $n \in N$ kan vi välja en punkt $y_n \in A_n \cap F$. Följden (y_n) har en konvergent delföljd (y_{n_k}). Vi betecknar $y_0 = \lim_{k \to \infty} y_{n_k}$ och låter $d_H(\cdot, \cdot)$ vara som Hausdorff metriken i definition 1.8. Eftersom $\lim_{n \to \infty} d_H(A_n, A_0) = 0$ så är $y_0 \in A_0$ och eftersom F är sluten så är $y_0 \in F$. Följaktligen är $(x_0, \theta_0) \in G'_{r,\rho}$. Vi har därmed visat att $G'_{r,\rho}$ är sluten och därmed är G_1 Borel.

Vi visar att G_2 är Borel. Vi definierar mängden $T'(x, \rho, \epsilon, k)$ så att $\theta \in T'(x, \rho, \epsilon, k)$ om det finns ett sådant tal r att $0 < r < \rho$ och ett sådant öppet intervall I i $[0, \pi)$ att $\theta \in I$ och $|I| < \epsilon$ för vilka

$$\frac{\mathcal{H}^1(F \cap U_r(x, I))}{r} > k|I|,$$

där $U_r(x, I)$ är innerpunkter i $C_r(x, I)$. Mängden $\{(x, \theta) \colon \theta \in T'(x, \rho, \epsilon, k)\}$ är öppen i $F \times [0, \pi)$. Då är

$$G_2 = \bigcap_{\rho > 0} \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcap_{0 < m < \infty} \{(x, \theta) \in T'(x, \rho, \epsilon, k)\}.$$

Vi kan ta snittet över endast rationella värden av ρ, ϵ och k. Följaktligen är G_2 Borel. $\square$

Sats 3.36. *Låt $F \subset \mathbb{R}^2$ vara en oregelbunden 1-mängd. Då är*

$$\mathcal{H}^1(\pi_V F) = 0 \textit{ för } \gamma_{2,1} \textit{ nästan alla } V \in Gr(1, \mathbb{R}^2).$$

Bevis. Vi antar inledningsvis att F är kompakt. Av Lemma 3.35 följer att $G = G_1 \cup G_2$ är en $(\mathcal{H}^1 \times \mathcal{L}^1)$-mätbar delmängd av $F \times [0, \pi)$. Av Lemma 3.34 följer att

$$\mathcal{L}^1\{\theta \colon (x, \theta) \in G\} = \pi$$

för nästan alla $x \in F$. Eftersom $\mathcal{H}^1 \llcorner F$ och $\mathcal{L}^1$ är σ-ändliga mått och G är mätbar så är villkoren i Fubinis sats uppfyllda. Följaktligen är

$$\mathcal{H}^1\{x \colon (x, \theta) \in G\} = \mathcal{H}^1(F).$$

Eftersom F enligt vårt antagande är mätbar innebär detta att nästan alla $\theta \in [0, \pi)$ är klusterriktningar för nästan alla $x \in F$. Låt θ vara en sådan riktning som är en klusterriktning för nästan alla $x \in F$. Låt V vara en linje genom origo som är vinkelrät mot L_θ. Det räcker att visa att $\mathcal{L}^1(\pi_V F) = 0$. Låt $F = F_0 \cup F_1 \cup F_2$, där $\mathcal{H}^1(F_0) = 0$, F_1 är mängden av punkter i F för vilka θ är en klusterriktning av första ordningen och F_2 är mängden av punkter i F för vilka θ är en en klusterriktning av andra ordningen.

Trivialt är $\mathcal{H}^1(\pi_V F_0) = 0$.

För att visa att $\mathcal{L}^1(\pi_V F_1) = 0$ kan vi använda oss av Sats 1.23. Om $x \in F_1$ så är $\mathcal{H}^0(L_\theta \cap F) = \infty$. Då de ifrågavarande måtten är rotationsinvarianta kan vi rotera $\mathbb{R}^2$ med en isometri som avbildar L_V på x-axeln. Enligt Sats 1.23 är

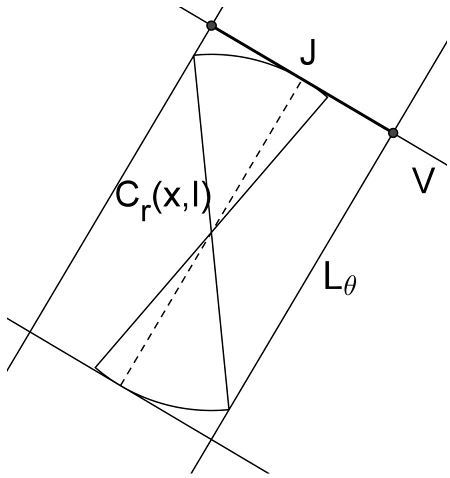
$$\infty > \mathcal{H}^1(F_1) \geq bc\mathcal{H}^1(\pi_V F_1),$$

då $s = 1$ och $t = 0$ för godtyckligt stora värden på c. Följaktligen är $\mathcal{H}^1(\pi_V F_1) = 0$.

Låt k vara ett godtyckligt positivt tal och låt

$$\mathcal{J} = \{J \colon J \text{ är ett intervall och } \mathcal{H}^1(\{x \in F \colon \pi_V x \in J\}) > k|J|\}.$$

Om $\theta \in I$ så kan $C_r(x, I)$ inneslutas i en rektangel vars bredd är mindre än $2|I|r$ och som har ett par sidor som är parallella med L_θ, se Figur 3.3.



Figur 3.3: Mängden $C_r(x, I)$ innesluten i en rektangel.

Av definitionen för F_2 följer att $\mathcal{J}$ är ett Vitali täcke för $\pi_V F_2$. Av Vitalis täckessats för Lebesguemått följer att det för ett godyckligt $\epsilon > 0$ existerar en uppräknelig mängd disjunkta intervall $\{J_i\} \subset \mathcal{J}$ som är ett täcke för $\pi_V F_2$ och för vilken gäller att

$$\mathcal{H}^1(\pi_V F_2) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |J_i| + \epsilon \leq \frac{1}{k}\mathcal{H}^1(F) + \epsilon.$$

Eftersom k och ϵ var godtyckliga är

$$\mathcal{H}^1(\pi_V F_2) = 0.$$

Därmed är $\mathcal{H}^1(\pi_V F) = 0$ för $\gamma_{2,1}$ nästan alla $V \in Gr(1, \mathbb{R}^2)$ om F är kompakt.

Om F är en godtycklig oregelbunden 1-mängd så är F mätbar. Då är

$$F = F' \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i,$$

där $\mathcal{H}^1(F') = 0$ och K_i är kompakt för alla i. Satsen följer. $\square$

3.3.3.2 Projektioner i $\mathbb{R}^n$, då $n \geq 3$

Vi bygger vidare på det vi har bevisat och visar induktivt att om F är helt 1-orektifierbar så är $\mathcal{H}^m(\pi_V F) = 0$ för $\gamma_{n,1}$ nästan alla $V \in Gr(1, \mathbb{R}^n)$. Därefter visar vi att detta också gäller för helt m-orektifierbara mängder i $\mathbb{R}^n$. I detta delkapitel använder vi oss av det faktum att man kan använda C^1-funktioner i definitionen av rektifierbarhet. Beviset följer noggrant tankegångarna i Brian Whites artikel [12].

Låt $E \subset \mathbb{R}^n$. Vi skriver $\mathcal{I}^m(E) = 0$ om $\mathcal{H}^m(\pi_V E) = 0$ för nästan alla $V \in G(m, \mathbb{R}^n)$. I annat fall skriver vi $\mathcal{I}^m(E) > 0$. Beteckningen $\mathcal{I}^m$ avser det integralgeometriska måttet.

Sats 3.37. Struktursats. *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ med $\mathcal{H}^m(E) < \infty$ och $\mathcal{I}^m(E) > 0$. Då är E inte helt m-orektifierbar.*

Korollarium 3.38. *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ och $\mathcal{H}^m(E) < \infty$. Då är $E = A \cup B$, där A är rektifierbar och*

$$\mathcal{H}^m(\pi_V B) = 0,$$

för $\gamma_{n,m}$ nästan alla $V \in Gr(m, \mathbb{R}^n)$.

Bevis. Korollariet följer omedelbart av Sats 3.37 och Sats 3.2. □

Då vi bevisade Sats 3.20 bevisade vi en del av Sats 3.30. Satsen nedan är en omformulering av struktursatsen för att visa att sats Sats 3.30 följer av struktursatsen.

Sats 3.39. *Om $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^m(E) < \infty$ och E är helt m-orektifierbar så är $\mathcal{H}^m(\pi_V E) = 0$ för $\gamma_{n,m}$ nästan alla $V \in Gr(m, \mathbb{R}^n)$.*

Lemma 3.40. *Det räcker att visa struktursatsen för Borelmängder.*

Bevis. Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara en godtycklig mängd med $\mathcal{H}^m(E) < \infty$. Då finns det en Borelmängd $B \supset E$ med $\mathcal{H}^m(B) = \mathcal{H}^m(E)$. Om $\mathcal{I}^m(E) > 0$ så är trivialt $\mathcal{I}^m(B) > 0$. Således finns det en sådan C^1-funktion $f\colon A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ att $\mathcal{H}^m(B \cap fA) > 0$, där A är mätbar. Eftersom mängden fA är mätbar och $\mathcal{H}^m(E) = \mathcal{H}^m(B)$ så är $\mathcal{H}^m(E \cap fA) = \mathcal{H}^m(B \cap fA) > 0$, vilket visar att struktursatsen gäller för E. □

Härefter antar vi alltid att E är en Borelmängd. Låt $\mathcal{B} = B_{n,m}$ vara familjen av sådana Borelmängder $B \subset \mathbb{R}^n$ att $\mathcal{I}^m(B) = 0$. Vi betecknar

$$\mathcal{Z}^m(E) = \sup\{\mathcal{H}^m(E \cap B)\colon B \in \mathcal{B}\}.$$

Lemma 3.41. *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ och $\mathcal{H}^m(E) < \infty$. Antagandet*

$$0 < \mathcal{I}^m(E) \text{ och } \mathcal{H}^m(E) < \infty$$

i struktursatsen är ekvivalent med

$$\mathcal{Z}^m(E) < \mathcal{H}^m(E) < \infty.$$

Bevis. Anta att $\mathcal{Z}^m(E) = \mathcal{H}^m(E)$. Då är $E = B \cup E_0$, där $B \in \mathcal{B}$ och $\mathcal{H}^m(E_0) = 0$. Eftersom vi antog att E är en Borelmängd så är $E \in \mathcal{B}$ och enligt definitionen för $\mathcal{B}$ är därmed $\mathcal{I}^m(E) = 0$.

Om $\mathcal{Z}^m(E) < \mathcal{H}^m(E)$ så är $E \notin \mathcal{B}$. Eftersom E är en Borelmängd följer av detta att $0 < \mathcal{I}^m(E)$. □

Lemma 3.42. *Det räcker att visa struktursatsen för Borelmängder E för vilka gäller att*

$$0 < \mathcal{H}^m(E) < \infty \text{ och } \mathcal{Z}^m(E) = 0.$$

Bevis. Låt $E \subset \mathbb{R}^n$. Eftersom familjen $\mathcal{B}$ är sluten under en uppräknelig union existerar det ett sådant $B \in \mathcal{B}$ att $\mathcal{Z}^m(E) = \mathcal{H}^m(E \cap B)$. Låt $E_1 = E \setminus B$. Trivialt är $\mathcal{Z}^m(E_1) = 0$. Om antagandena i strukturssaten gäller för E så gäller de också för E_1 enligt Lemma 3.41. Om påståendet i strukturssatsen gäller för E_1 så gäller det också för E. □

Lemma 3.43. *Vi kan anta att E är kompakt då vi bevisar struktursatsen.*

Bevis. Låt E vara en sådan Borelmängd att $0 < \mathcal{H}^m(E) < \infty$. Då finns det en kompakt mängd $K \subset E$ med samma egenskap. Om $\mathcal{Z}^m(E) = 0$ så är $\mathcal{Z}^m(K) = 0$, ty trivialt gäller att delmängder ärver egenskapen ifråga. Därmed gäller struktursatsen antaganden för K. Om påståendet i struktursatsen gäller för K så gäller det också för E. □

Sats 3.44. *Struktursatsen gäller för 1-dimensionella mängder i $\mathbb{R}^2$.*

Bevis. Satsen följer omedelbart av Sats 3.30 (2), som vi har bevisat för fallet $n = 2$.

□

Definition 3.45. Låt $E \subset \mathbb{R}^n$, $0 < \mathcal{H}^m(E) < \infty$ och V ett linjärt delrum av $\mathbb{R}^n$. Vi säger att E projiceras önskvärt till V med avseende på mängden $A \subset E$ om $\mathcal{H}^m(A) > 0$ och $\mathcal{H}^m(\pi_V(A)) > 0$.

En rektifierbar kurva har en tangent i nästan alla sina punkter. (Se Falconer [3], Sats 3.8 för bevis.) I de två följande lemmana utnyttjar vi implicit denna sats.

Lemma 3.46. *Låt C vara bildmängden för en C^1-kurva f i $\mathbb{R}^n$. För $\gamma_{n,1}$ nästan alla $L \in Gr(1, \mathbb{R}^n)$ gäller att C projiceras önskvärt till L med avseende på alla sådana $A \subset C$ för vilka gäller att $\mathcal{H}^1(A) > 0$.*

Bevis. Låt $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ vara en C^1-funktion och $C = f([a, b])$. Låt $v(y)$ vara enhetstangentvektorn för punkten $y \in C$ om den existerar. Vi definierar måttet μ för Borelmängder $B \subset \mathbb{R}^n$ så att

$$\mu(B) = \mathcal{H}^1\{y \in C\colon v(y) \in B\}.$$

Låt B vara en Borelmängd. Eftersom funktionen $y \mapsto v(y)$ är kontinuerlig i sin definitionsmängd C så är mängden $v^{-1}(B)$ $\mathcal{H}^1$-mätbar. Låt A vara en godtycklig mängd. Då är följande ekvationer ekvivalenta:

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B),\\ \mathcal{H}^1 \llcorner C(v^{-1}(A)) &= \mathcal{H}^1 \llcorner C(v^{-1}(A \cap B)) + \mathcal{H}^1 \llcorner C(v^{-1}(A \setminus B)) \text{ och}\\ \mathcal{H}^1 \llcorner C(v^{-1}(A)) &= \mathcal{H}^1 \llcorner C(v^{-1}(A) \cap v^{-1}(B)) + \mathcal{H}^1 \llcorner C(v^{-1}(A) \setminus v^{-1}(B)).\end{aligned}$$

Således är Borelmängder μ-mätbara.

För $i = 1, 2, \ldots, n-1$ definierar vi

$$\mathcal{V}_i = \{V \in Gr(i, \mathbb{R}^n) \colon \mu(V) > 0 \text{ och äkta delrum av } V \text{ har } \mu\text{-måttet } 0\}.$$

Av definitionen för $\mathcal{V}_i$ följer att om $V_{i_j}, V_{i_k} \in \mathcal{V}_i$ och $V_{i_j} \neq V_{i_k}$ så är $\mu(V_{i_j} \cap V_{i_k}) = 0$. Eftersom V_{i_j} och V_{i_k} är Borelmängder och därmed μ mätbara så är $\mu(V_{i_j} \cup V_{i_k}) = \mu(V_{i_j}) + \mu(V_{i_k})$. Av detta och det faktum att $\mu(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^1(C) < \infty$ följer att $\mathcal{V}_i$ innehåller uppräkneligt många element för alla i.

Låt $V \in Gr(i, \mathbb{R}^n)$ och $1 \leq i \leq n-1$. Då är

$$\gamma_{n,1}(\{L \in Gr(1, \mathbb{R}^n) \colon L \perp V\}) = 0.$$

Följaktligen är

$$\gamma_{n,1}(\{L \in Gr(1, \mathbb{R}^n) \colon \text{ för alla } V \in \mathcal{V}_i \text{ är } L \perp V\}) = 0.$$

Därmed är det tillräckligt att visa att C projiceras önskvärt till en linje L som inte är vinkelrät mot något element i någon $\mathcal{V}_i$.

Låt $A \subset C$ vara godtycklig, $\mathcal{H}^m(A) > 0$ och L är en sådan linje. Genom att förändra A i nollmängd kan vi anta att $f'(x) \not\perp L$ då $x \in A$. Välj $V \in Gr(2, \mathbb{R}^n)$ så att $V \perp L$. Vi skriver $A_{n,m} = \{a \in A \colon A \cap X(a, \frac{1}{n}, V, \frac{1}{m}) = \emptyset\}$. På motsvarande sätt som i Lemma 3.12 kan det visas att det finns sådana Lipschitz funktioner $g_{n,m}$ att $L_{g_{n,m}} \leq m$ och $A_{n,m} = g_{n,m}(\pi_{V^\perp} A_{n,m})$. Eftersom $A = \cup A_{n,m}$ så kan vi fixera $n, m \in \mathbb{N}$ så att $\mathcal{H}^1(A_{n,m}) > 0$. Följaktligen är $\mathcal{H}^1(\pi_L(A)) \geq \mathcal{H}^1(\pi_L A_{n,m}) = \mathcal{H}^1(\pi_{V^\perp} A_{n,m}) > 0$. $\square$

Lemma 3.47. *Låt C vara bilden av en C^1 kurva i $\mathbb{R}^n$, låt L vara en linje, låt $v(y)$ vara enhetstangentvektorn för $y \in C$ och låt $A = \{y \in C \colon v(y) \perp L\}$. Då är $\mathcal{H}^1(\pi_L A) = 0$.*

Bevis. Låt $\epsilon > 0$. För varje punkt y i A och varje $i \in \mathbb{N}$ finns det en rektangel $R_{y,i}$ som y hör till och vars ena sida är parallell med linjen L och kortare än $\min\{1/i, \epsilon\mathcal{H}^1(C \cap R_{y,i})\}$. Vi betecknar $I_{y,i} = \pi_L R_{y,i}$ och $\mathcal{I} = \{I_{y,i} \colon y \in A, i \in \mathbb{N}\}$. Då är $\mathcal{I}$ ett slutet Vitali täcke för mängden $\pi_L A$. Enligt Sats 1.25 finns det därmed sådana disjunkta intervall $I_{y_k,i_k} \in \mathcal{I}$ att $\mathcal{H}^1(\pi_L A \setminus \cup_{k=1}^{\infty} I_{y_k,i_k}) = 0$, där $k \in \mathbb{N}$, $y_k \in A$ och $i_k \in \mathbb{N}$. Av detta följer att

$$\mathcal{H}^1(\pi_L A) \leq \mathcal{H}^1(\cup_{k=1}^{\infty} I_{y_k,i_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(I_{y_k,i_k}) \leq \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(C \cap R_{y_k,i_k}) \leq \epsilon \mathcal{H}^1(C).$$

Den sista olikheten följer av att rektanglarna R_{y_k,i_k} är disjunkta. Påståendet följer eftersom $\epsilon > 0$ var godtyckligt. □

Lemma 3.48. *Anta att strukturssatsen gäller för 1-dimensionella mängder i $\mathbb{R}^m$, där $0 < m < n$. Låt $0 < k < n$, låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara kompakt med $0 < \mathcal{H}^1(E) < \infty$ och $\mathcal{I}^1(E) > 0$. Då finns det en sådan mängd $\mathcal{V}_{k,E} \subset Gr(k, \mathbb{R}^n)$ att:*

(i) *för varje $V \in \mathcal{V}_{k,E}$ finns det en sådan C^1-kurva $C = C_V \subset V$ att $\mathcal{H}^1(\pi_V(E) \cap C) > 0$ och*

(ii) *$\mathcal{V}_{k,E}$ är en Borelmängd och $\gamma_{n,k}(\mathcal{V}_{k,E}) > 0$.*

Bevis. Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara kompakt och låt $L \in Gr(1, \mathbb{R}^n)$. På motsvarande sätt som Lemma 1.9 bevisades kan det visas att $L \mapsto \mathcal{H}^1(\pi_L(E))$ är Borel och således mätbar. Om $B \subset Gr(1, \mathbb{R}^n)$ är Borel så definierar vi måttet $\gamma'_{n,1}$ så att

$$\gamma'_{n,1}(B) = \int_{V \in Gr(k,\mathbb{R}^n)} \int_{L \in Gr(1,V)} \chi_B \, \mathrm{d}\gamma_{V_{k,1}} L \, \mathrm{d}\gamma_{n,k} V,$$

där $\gamma_{V_{k,1}}(A) = \gamma_{k,1}(\rho_{V,\mathbb{R}^k}(A))$ och $\rho_{V,\mathbb{R}^k}$ är en isometrisk rotation som avbildar V på $\mathbb{R}^k$ (som vi betraktar som en delmängd av $\mathbb{R}^n$). Då är $\gamma'_{n,1} = \gamma_{n,1}$, eftersom båda måtten är sannolikhetsmått som är invarianta under ortogonalgruppen $O(n)$ och därmed jämnt fördelade och således unika. Följaktligen är

$$\text{(1)} \quad \int_{L \in Gr(1,n)} \mathcal{H}^1(\pi_L E) \, \mathrm{d}\gamma_{n,1} L = \int_{L \in Gr(1,n)} \mathcal{H}^1(\pi_L E) \, \mathrm{d}\gamma'_{n,1} L$$
$$= \int_{V \in Gr(k,\mathbb{R}^n)} \int_{L \in Gr(1,V)} \mathcal{H}^1(\pi_L E) \, \mathrm{d}\gamma_{V_{k,1}} L \, \mathrm{d}\gamma_{n,k} K,$$

Hypotesen $\mathcal{I}^1(E) > 0$ är ekvivalent med att (1) är positiv. Följaktligen är $\gamma_{n,k}(\mathcal{V}_k) > 0$ då $\mathcal{V}_k$ är mängden av sådana k-dimensionella plan V att

$$\text{(2)} \quad \int_{L \in Gr(1,V)} \mathcal{H}^1(\pi_L E) \, \mathrm{d}\mu_{V_{k,1}} L > 0.$$

Mängden $\mathcal{V}_k$ är Borel eftersom funktionen $L \mapsto \mathcal{H}^1(\pi_L(E))$ är Borel.

Låt $V \in \mathcal{V}_k$. Om $L \subset V$ så är

$$\pi_L E = \pi_L(\pi_V E).$$

Eftersom V är isomorf med $\mathbb{R}^k$ kan vi betrakta $\pi_V E$ som en delmängd av $\mathbb{R}^k$. Av (2) följer att $\mathcal{I}^1(\pi_V E) > 0$. Trivialt är $\mathcal{H}^1(\pi_V E) \leq \mathcal{H}^1(E) < \infty$. Enligt induktionshypotesen gäller struktursatsen för $\pi_V E$, så det finns en C^1-kurva vars bildmängd C finns i V och $\mathcal{H}^1(\pi_V E \cap C) > 0$. □

Sats 3.49. *Strukturssatsen gäller för* 1*-dimensionella mängder i* $\mathbb{R}^n$.

Bevis. Fallet $n = 2$ har redan bevisats. Vi kan därför anta att $n > 2$. Låt E vara en sådan kompakt mängd att $\mathcal{H}^1(E) > 0, \mathcal{I}^1(E) > 0$ och $\mathcal{Z}^1(E) = 0$. Vi gör induktionsantagandet att struktursatsen gäller för 1-dimensionella mängder i $\mathbb{R}^m$, då $0 < m < n$. Av Lemma 3.48 följer då att det finns ett hyperplan $H \in Gr(n-1, \mathbb{R}^n)$ och en C^1 kurva f vars bild C i H är sådan att

$$\mathcal{H}^1(\pi_H E \cap C) > 0.$$

Trivialt är då $\mathcal{H}^1(E \cap M) > 0$ och $\mathcal{Z}^1(E \cap M) = 0$, där $M = \pi_H^{-1} C$ är en 2-dimensionell yta. Därmed kan vi ersätta E med $E \cap M$ och på så vis anta att $E \subset M$.

Vi kan också anta att E projiceras önskvärt till H med avseende på Borelmängder $B \subset E$. Om så inte är fallet kan vi låta $F \subset E$ vara en sådan Borelmängd att

$$\mathcal{H}^1(F) = \sup_{B \subset E \text{ är Borel}, \mathcal{H}^1(\pi_H B) = 0} \mathcal{H}^1(B)$$

och byta ut E mot en kompakt delmängd av $E \setminus F$ med positivt mått.

Av Lemma 3.46 följer att det för nästan alla linjer $L \in G(1, H)$ gäller att

(1) $$C \text{ projiceras önskvärt till } L.$$

Därmed gäller för nästan varje plan $V \in G(2, \mathbb{R}^n)$ att

(2) $$V \cap H = L$$

för någon linje $L \in G(1, H)$ som uppfyller (1).

Med stöd av Lemma 3.48 kan vi välja ett sådant plan V att V innehåller bilden C' av en sådan C^1-kurva att $\mathcal{H}^1(\pi_V E \cap C') > 0$. Då är $\mathcal{H}^1(E \cap M') > 0$, där $M' = \pi_V^{-1} C'$ är en $(n-1)$-dimensionell yta.

Låt L vara en linje som uppfyller (1) och (2) och låt $A = \{y \in M \colon v(\pi_H y) \perp L\}$, där $v(y)$ är enhetstangentvektorn för $y \in C$. Av Lemma 3.47 följer att $\mathcal{H}^1(\pi_L(\pi_H A)) = 0$. Därmed följer av (1) att $\mathcal{H}^1(\pi_H A) = 0$. Eftersom E projiceras önskvärt till H med avseende på Borelmängder innebär det i sin tur att $\mathcal{H}^1(E \cap A) = 0$. Följaktligen har mängden

$$(E \setminus A) \cap M' = E \cap (M \setminus A) \cap M'$$

positivt $\mathcal{H}^1$ mått. Vi kommer att visa att mängderna $M \setminus A$ och M' skär varandra transversellt. Detta innebär att $(M \setminus A) \cap M'$ kan täckas med bilden av uppräkneligt många C^1-kurvor.

Låt $x \in (M \setminus A) \cap M'$. Låt v_1 och v_2 vara sådana tangentvektorer till $M \setminus A$ att varje tangentvektor till $M \setminus A$ i punkten x hör till $span(v_1, v_2)$ och $v_1 \perp v$ för alla $v \in H$. Låt $u_1, \ldots, u_{n-1}$ vara sådana tangentvektorer för M' i punkten x att varje tangentvektor hör till $span(u_1, \ldots, u_{n-1})$, $u_2, \ldots, u_{n-1} \perp u$ för alla $u \in V$ och u_1 är parallell med V. Anta att $v_1 \in span(u_2, \ldots, u_{n-1})$. Då är $v_1 \perp u$ för alla $u \in V \cup H$. Följaktligen gäller antingen att $V \subset H$ eller att $v_1 = \vec{0}$. Detta är motsägelser och således är $v_1 \notin span(u_2, \ldots, u_{n-1})$. Om $v_1 \in span(u_1, \ldots, u_{n-1})$ så bör därmed $u_1 \perp L$, ty $v_1 \perp L$ och $u_2, \ldots u_n \perp L$. Eftersom $v_2 \not\perp L$ innebär det att $v_2 \notin span(u_1, \ldots u_{n-1})$, vilket visar att $M \setminus A$ och M' skär varandra transversellt. □

Sats 3.50. *Låt $V \subset \mathbb{R}^n$ vara ett affint delrum, $K \subset V$ kompakt, $L \subset V$ en linje och låt $\pi_L \colon V \to L$ vara en ortogonal projektion till linjen L. Anta att $K = A \cup B$, där A är innesluten i en uppräknelig union av bildmängder för C^1 kurvor och $\mathcal{H}^1(\pi_L(B)) = 0$. Anta att $f \colon \pi_L(K) \to L^\perp \cap V$ är en funktion vars graf är innesluten i K. Då är f approximativt differentierbar nästan överallt.*

Bevis. Låt $C_1, C_2, \ldots$ vara den uppräkneliga unionen av bildmängder för C^1 kurvor $f_1, f_2, \ldots$. Låt

$$B' = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{y \in C_i \colon \text{ tangentlinjen till } C_i \text{ i punkten } y \text{ är vinkelrät mot } L\}.$$

Då är $\mathcal{H}^1(\pi_L B') = 0$ enligt Lemma 3.47. Därmed kan vi anta att $B' \subset B$.

Låt

$$U_i = \{x \in \pi_L(K) \setminus \pi_L(B) \colon (x, f(x)) \in C_i\}.$$

Av detta följer direkt att det finns sådana C^1-funktioner $g_i \colon U_i \to L^\perp$ att $f(x)|_{U_i} = g_i(x)$. Funktionen g_i är deriverbar och U_i är en mätbar mängd. Enligt Vitalis densitetssats är $\Theta(U_i, x) = 1$ för nästan alla $x \in U_i$. Således är f approximativt deriverbar nästan överallt i U_i för alla i. Eftersom $\cup_{i=1}^{\infty} U_i$ täcker nästan hela $\pi_L(K)$ är f approximativt deriverbar $\mathcal{H}^1$ nästan överallt i $\pi_L(K)$. □

Lemma 3.51. *Låt $K \subset \mathbb{R}^n$ vara en kompakt mängd och $0 < \mathcal{H}^m(K) < \infty$. Då gäller för nästan alla V att nästan alla $L \in Gr(1, V)$ är sådana att (V, L) är ett fint par med avseende på K. (Se definition 1.12.)*

Bevis. Låt $W \in Gr(m-1, \mathbb{R}^m)$. Av Sats 2.7 följer att

$$\int_{w \in W}^{*} \mathcal{H}^1(K \cap \pi_W^{-1} w) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^{m-1} w \le \alpha(m-1)\mathcal{H}^m(K) < \infty,$$

då vi väljer mängden $A = K$ och funktionen $f = \pi_W|_K$. Detta visar att (1) gäller för $\gamma_{n,n-m+1}$ nästan alla $V \in Gr(n-m+1, \mathbb{R}^n)$.

Fixera ett sådant V att (1) gäller. Vi har visat att struktursatsen gäller för 1-dimensionella mängder i $\mathbb{R}^{n-m+1}$. Av Korollariet 3.38 till struktursatsen följer därmed att $K \cap V = A \cup B$, där A kan täckas med bildmängden för uppräkneligt många C^1-kurvor och $\mathcal{H}^1(\pi_L B) = 0$ för nästan alla linjer $L \in Gr(1, V)$. Detta bevisar lemmat. □

Vi kommer att använda den lexiografiska ordningen för $\mathbb{R}^n$ i följande lemma. Enligt denna ordning är $x < y$ om det för något $1 \le l \le n$ gäller att $x_l < y_l$ och $x_i = y_i$, då $i < l$.

Lemma 3.52. *Låt $K \subset \mathbb{R}^n$ vara kompakt med $0 < \mathcal{H}^m(K) < \infty$. Låt $\Pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en ortogonal projektion till de m första koordinaterna. Låt $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en rotation och låt*

$$\begin{aligned} &f_\rho\colon \Pi(\rho K) \to \mathbb{R}^{n-m}, \\ &f_\rho(x) = \min\{y \in \mathbb{R}^{n-m}\colon (x, y) \in \rho K\}, \end{aligned}$$

där minimumet är med avseende på den lexiografiska ordningen. Då är f_ρ är approximativt deriverbar nästan överallt för θ_n nästan alla ρ.

Bevis. Vi noterar först att f_ρ är väldefinierad eftersom K är kompakt. Låt $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m-1}$ vara en ortogonal projektion till de m första koordinaterna förutom koordinat j, där $1 \le j \le m$. Då $a \in \mathbb{R}^{m-1}$ låt

$$\begin{aligned} V_a &= \pi^{-1} a, \\ L_a &= \{x \in V_a\colon x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots x_n = 0\}. \end{aligned}$$

Vi fixerar j. Mängden av alla par (V, L) är $\cup_{V \in A(n-m+1, \mathbb{R}^n)} V \times Gr(1, V)$. Det finns en bijektiv Lipschitz funktion $f\colon \cup_{V \in A(n-m+1, \mathbb{R}^n)} V \times Gr(1, V) \to Gr(n-m+1, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{m-1} \times Gr(1, \mathbb{R}^{n-m+1})$ vars invers är Lipschitz. Mängden av par (V, L) som är fina med avseende på K är Borel enligt Lemma 1.13. Enligt Fubinis sats och Lemma 3.51 gäller då för nästan alla $L \in Gr(1, \mathbb{R}^{n-m+1})$ att för nästan alla $a \in \mathbb{R}^{m-1}$ och nästan alla $V \in Gr(n-m+1, \mathbb{R}^n)$ är $f^{-1}(V, a, L)$ fint med avseende på K. Detta är ekvivalent med följande påstående: För θ_n nästan alla rotationer ρ gäller att för nästan alla $a \in \mathbb{R}^{k-1}$ är paret (V_a, L_a) fint med avseende på ρK. Enligt Sats 3.50 gäller för sådana a och ρ att funktionen $t \to f_\rho(a,t)$ är approximativt differentierbar nästan överallt.

Vi har därmed visat att för ett givet j så gäller för nästan alla ρ att $ap\ D_j f_\rho$ existerar nästan överallt. Av Sats 2.10 följer att för ett sådant ρ är f_ρ approximativt deriverbar nästan överallt. $\square$

Sats 3.53. *Struktursatsen gäller för m-dimensionella mängder i $\mathbb{R}^n$.*

Bevis. Låt $K \subset \mathbb{R}^n$ vara kompakt och $0 < \mathcal{I}^m(K)$ och $\mathcal{H}^m(K) < \infty$.

Eftersom $\mathcal{I}^m(K) > 0$, så är

$$\theta_n(\{\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \colon \mathcal{H}^m(\Pi\rho K) > 0\}) > 0$$

där $\Pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en projektion till de m första koordinaterna och ρ är en rotation. Av Lemma 3.52 följer att vi kan välja en sådan rotation ρ att f_ρ (definierad som i Lemma 3.52) är approximativt deriverbar nästan överallt. Följaktligen finns det enligt Sats 2.10 en sådan mätbar mängd $A \subset \Pi\rho K$ att $\mathcal{H}^m(A) > 0$ och $f_\rho|_A$ är en Lipschitz funktion, vilket skulle bevisas. $\square$

Litteraturförteckning

[1] De Lellis, C.: *Rectifiable Sets, Densities and Tangent Measures*, European Mathematical Society, 2008

[2] Evans, L.; Gariepy, R.: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 1992

[3] Falconer, K. J.: *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, 1985

[4] Federer, H.: *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, 1969

[5] Hajlasz, P.: *Geometric Analysis*, http://www.pitt.edu/~hajlasz/Teaching/Math2304Spring2014/Part%201.pdf [Hämtad 17.6.2015]

[6] Holopainen, I.: *Reaalianalyysi I*, föreläsningskompendium, Helsingfors universitet, 2011.

[7] Marstrand, J. M.: *Hausdorff two-dimensional measure in 3-space*, Proc. London Math. Soc., Vol. s3-11, s.91-108, 1961

[8] Mattila, P.: *Hausdorff m regular and rectifiable sets in n-space*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 205, s. 263-274, 1975

[9] Mattila, P.: *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and rectifiability*, Cambridge University Press, 1995.

[10] Morgan, F.: *Geometric Measure Theory: A Beginners Guide*, Academic Press, 2009.

[11] Simon, L.: *Lectures on Geometric Measure Theory*, Proceedings of the Center for Mathematical Analysis, Vol. 3, 1983

[12] White, B.: *A new proof of Federer's structure theorem for k-dimensional subsets of $\mathbb{R}^n$*, Journal of the American Mathematics Society, Vol. 11, No. 3 (Jul., 1998), s. 693-701